EUCLIDES

TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDACTIEK DER EXACTE VAKKEN
ONDER LEIDING VAN Dr H. STREEFKERK, P. WIJDENES,
Dr H. A. GRIBNAU VOOR WIMECOS EN J. WILLEMSE VOOR
LIWENAGEL

25e JAARGANG 1949/50
Nr 3

P. NOORDHOFF N.V. GRONINGEN

Euclides, Tijdschrift voor de Didactiek der Exacte Vakken verschijnt in zes tweemaandelijkse afleveringen. Prijs per jaargang ƒ 8.00 . Zij die tevens op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde (ƒ 8.00) zijn ingetekend, betalen ƒ 6.75.

De leden van Liwenagel (Leraren in wiskunde en natuurwetenschappen aan gymnasia en lycea) en van Wimecos (Vereniging van Leraren in de wiskunde, de mechanica en de cosmografie aan Hogere Burgerscholen en Lycea) krijgen Euclides toegezonden als Officieel Orgaan van hun Verenigingen; de leden van Liwenagel storten de abonnementskosten ten bedrage van ƒ 2,50 op de postgirorekening no. 59172 van Dr. H. Ph. Baudet te 's-Gravenhage. De leden van Wimecos storten hun contributie voor het verenigingsjaar van 1 September 1949 t/m 31 Augustus 1950 (waarin de abonnementskosten op Euclides begrepen zijn) ten bedrage van ƒ 4,50 op de postgirorekening no. 143917 ten name van de Vereniging van Wiskundelararen te Amsterdam. Voor 1 September 1950—1 September 1951 is de contributie vastegsteld op ƒ 5,50. De abonnementskosten op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde moeten op postgirorekening no. 6593 van de firma Noordhoff te Groningen voldaan worden onder bijvoeging, dat men lid is van Liwenagel of Wimecos. Deze bedragen ƒ 6,75 per jaar franco per port.

Artikelen ter opneming te zenden aan Dr H. Streefkerk, Hilversum, Van Lenneplaan 16, Tel. K 2950; 5558.

Aan de schrijvers van artikelen worden op hun verzoek 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt.

Boeken ter bespreking en ter aankondiging te zenden aan P. Wijdenes, Amsterdam-Zuid, Jac. Obrechtstr. 88; Tel. K 2900; 27119.

INHOUD.

OFFICIELE MEDEDELINGEN VAN WIMECOS.

Kort verslag van de Algemene Vergadering van 4 Januari 1950 te Amsterdam.

Op deze vergadering werden de Notulen en de Jaarverslagen van Secretaris, Leesportefeuillecommissie en Penningmeester goedgekeurd. De contributie werd op ƒ 5.50 vastgesteld voor het verenigingsjaar, dat ingaat op 1 September 1950.

De aftredende Inspecteur van het Middelbaar Onderwijs, de Heer J. van Andel, werd wegens zijn grote verdiensten t.a.v. het Wiskunde-onderwijs op de Middelbare School en de wijze, waarop hij Wimecos steeds raadpleegde over eventuele veranderingen van dit onderwijs en rekening hield met onze wensen, tot Erelid der Vereniging benoemd.

De Heer Buzeman werd als Bestuurslid herkozen. In de Kascommissie werden de H.H. Truyens en Boost gekozen.

Besloten werd, dat ieder jaar twee Bestuursleden zouden aftreden met dien verstande, dat Voorzitter en Secretaris nooit tegelijk zouden mogen aftreden.

Prof. Dr D. E. van Lennep hield zijn aangekondige voordracht over: „Kan een psychotechnisch Onderzoek het Toelatingsexamen vervangen?" Uit deze voordracht bleek duidelijk, dat men er met een psychotechnisch onderzoek nog lang niet komt en dat, in tegenstelling met wat men ons wel wil doen geloven, men zeer voorzichtig moet wezen met conclusies te trekken. Van verscheidene kanten is het Bestuur gevraagd deze lezing in Euclides te publiceren. De spreker heeft dit toegezegd, maar hiervoor tijd gevraagd.

De discussies over het aan de Verenigingen Velines en Wimecos uitgebrachte rapport betreffende het nieuwe programma voor het vak Mechanica namen zeer veel tijd in beslag. De vergadering voelde wel voor aanvaarding van het nieuwe programma, al is door één der rapporteurs, de Heer Staring, toegezegd, dat de Commissie de verschillende punten hiervan nog eens zal trachten te splitsen in gewenste en noodzakelijke. Men was n.l. bang, dat het programma te uitgebreid was. De grote moeilijkheid was echter de door de Commissie voorgestelde regeling van het eindexamen. Aan de Commissie was n.l. alleen het opstellen van een nieuw leer-

programma gevraagd, maar zij beschouwde de door haar voorgestelde regeling van het eindexamen als een essentiëel punt van haar rapport. De bezwaren tegen de voorgestelde eindexamenregeling betroffen in hoofdzaak de volgende punten:

1: de Commissie wil in het vervolg alleen Wiskunde mondeling examineren voorzover het Algebra en Stereometrie betreft en dit niet langer dan een half uur.

2: een schriftelijk eindexamen Mechanica wordt niet afgenomen, maar daarvoor komt een half uur mondeling in de plaats.

Dat na het schriftelijk examen Wiskunde Goniometrie en Beschrijvende Meetkunde niet meer eventueel op het mondeling examen ter sprake zouden komen, werd zeer ongewenst geacht. Ook de Heer Pekelharing, lid der Commissie, erkende dit bezwaar, maar wees er op, dat men anders een vierde gecommitteerde nodig had.

Wat het tweede bezwaar aangaat, was men van oordeel, dat het zeer gevaarlijk is voor het peil van ons onderwijs elke school zelf dit peil min of meer te laten bepalen. Men vreesde, dat bij de huidige tendens, die er bestaat en die niet bepaald gunstig is voor de Wiskundevakken, dit wel eens het begin van het einde van het Mechanica-onderwijs kon betekenen. Een stemming werd niet gehouden in verband met het vergevorderd uur. De Heer van Andel zei, dat men z.i. de zaak niet behoefde te overhaasten en hij gaf de raad, dat het Bestuur nog eens met de Inspectie zou spreken, hetgeen gebeuren zal. De bezwaren tegen de coördinatie van het Wiskunde-onderwijs en het Mechanica-onderwijs, die te berde werden gebracht, leken toch wel te overkomen. Het resultaat van de besprekingen is dus, dat er nog geen definitief besluit genomen is. Ook met Velines zal uit de aard der zaak contact worden gezocht bij de opstelling van het eindrapport. Nadrukkelijk werd van alle kanten de grote waardering tot uiting gebracht, die men voor het werk der Commissie had, waardoor nu eindelijk het Mechanica-onderwijs zich meer op de Natuurkunde zou kunnen instellen.

ADRESWIJZIGINGEN VAN DE LEDEN.

Daar bij het verzenden van de convocaties voor de laatste Algemene Vergadering weer gebleken is, dat verschillende adreswijzigingen niet aan het Secretariaat opgegeven zijn en ook de Firma Noordhoff bij het verzenden van Euclides meermalen exemplaren terug krijgt, wordt aan de leden van Euclides verzocht hun eventuele adreswijzigingen tijdig aan het Secretariaat op te geven.

CONTRIBUTIE WIMECOS.

De aandacht van de leden wordt er opgevestigd, dat de Contributie voor Wimecos voor het Verenigingsjaar van 1 September 1949—1 September 1950 *f* 4.50 bedraagt en voor het Verenigingsjaar van 1 September 1950—1 September 1951 *f* 5.50. De leden moeten deze bedragen storten op postgirorekening no. 143917 van de Vereniging van Wiskundeleraren te Amsterdam. De abonnementskosten voor Euclides zijn hierbij begrepen.

De Secretaris

Ir. J. J. TEKELENBURG.
Bergse laan 13*a*, Rotterdam.

DE REGEL VAN SIMPSON IN HET STEREOMETRIEONDERWIJS.

DOOR

Dr JOH. H. WANSINK

1. Meermalen zijn er in onze kringen stemmen opgegaan om de prismoide uit ons onderwijs weg te laten[1]), ter beperking van het aantal inhoudsberekeningen.

Nu de beginselen der differentiaal- en integraalrekening tot het leerplan van de H.B.S.[B] behoren, lijkt het me stellig niet gewenst tot de genoemde vereenvoudiging over te gaan. Integendeel, er is alle reden om de inhoudsformule voor de prismoide, die voor een veel ruimere klasse van lichamen geldt dan waarvoor we ze thans bij ons onderwijs plegen toe te passen, als „*regel van Simpson*" [2]) bij de inhoudsberekening een bijzonder relief te geven [3]).

2. *Gegeven.* $\mathrm{D}(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$ . . . . (1)

Te bewijzen:

$$\int_0^h \mathrm{D}(x)dx = \tfrac{1}{6}h\,\{\mathrm{D}(h) + 4\mathrm{D}(\tfrac{1}{2}h) + \mathrm{D}(o)\} \quad . \quad . \quad (2)$$

Bewijs. Eenvoudige integratie geeft:

$$\int_0^h \mathrm{D}(x)dx = ah + \tfrac{1}{2}bh^2 + \tfrac{1}{3}ch^3 + \tfrac{1}{4}dh^4. \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Voorts is: $\mathrm{D}(h = a + bh + ch^2 + dh^3,$

$\mathrm{D}(\tfrac{1}{2}h) = a + \tfrac{1}{2}bh + \tfrac{1}{4}ch^2 + \ \ dh^3,$

$\mathrm{D}(o) = a,$

waaruit volgt:

$$\tfrac{1}{6}h\{\mathrm{D}(h) + 4\mathrm{D}(\tfrac{1}{2}h) + \mathrm{D}(o)\} = ah + \tfrac{1}{2}bh^2 + \tfrac{1}{3}ch^3 + \tfrac{1}{4}dh^4 \quad . \quad . \quad (4)$$

Uit (3) en (4) volgt het te bewijzene.

Als we de integraal door I en $\mathrm{D}(h)$, $\mathrm{D}(\tfrac{1}{2}h)$, $\mathrm{D}(o)$ opvolgend door G, M en B voorstellen, krijgen we:

$$\mathrm{I} = \tfrac{1}{6}h(\mathrm{G} + 4\mathrm{M} + \mathrm{B}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

(*Formule van Simpson*).

---

[1]) Zie o.a.: *Euclides*, jg. 14, blz. 82.

[2]) Thomas Simpson (1710—1761), Woolwich, Engeland, niet te verwarren met Robert Simson (1687—1768), Glasgow, die bij ons bekend is door de *rechte van Simson* (beter: *rechte van Wallace*).

[3]) Zie Dr. E. Voellmy, Zur Prismatoïdformel, in: Elemente der Mathematik, 1949, blz. 42, 43, Basel.

Opmerking. De formule van Simpson geldt niet, indien $D(x)$ een rationale functie is van een andere graad dan de eerste, de tweede of de derde. Om dit te bewijzen, berekenen we de bijdragen, die de term x^n in $D(x)$ tot de beide leden van (2) geeft.

We vinden:

$$\int_0^h x^n dx = \frac{h^{n+1}}{n+1}$$

en $$\tfrac{1}{6}h\,\{D(h) + 4D(\tfrac{1}{2}h) + D(o)\} = \{\tfrac{1}{6} + \tfrac{2}{3}(\tfrac{1}{2})^n\}h^{n+1},$$

welke bijdragen voor willekeurige h slechts dan gelijk zijn, als

$$\frac{1}{n+1} = \tfrac{1}{6} + \tfrac{2}{3}(\tfrac{1}{2})^n,$$

d.i. als $$2^{n-2} = \frac{n+1}{5-n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Het linkerlid van deze vgl. is definiet-positief, het rechterlid is positief voor $-1 < (n) < 5$. Willen we onderzoeken, welke gehele n voldoen, dan hebben we slechts te substitueren:

$$n = 0,\ 1,\ 2,\ 3 \text{ en } 4,$$

2^{n-2} is opv. $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, 1, 2 en 4,

$\frac{n+1}{5-n}$ is opv. $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{2}$, 1, 2, 5,

zodat alleen $n = 1$, 2 en 3 voldoen. Gebroken waarden van n voldoen niet: immers voor gebroken n is het linkerlid van (6) irrationaal, het rechterlid rationaal [1]).

3. $\int_{x_1}^{x_2} D(x)dx$ is de inhoud van een lichaam gelegen tussen de vlakken $x = x_1$ en $x = x_2$, indien $D(x)$ de oppervlakte voorstelt van de doorsnede evenwijdig met het vlak $x = x_1$ voor $x_1 \leqq (x) \leqq x_2$.

We beschouwen nu een klasse van lichamen, die voldoen aan de volgende voorwaarden:

a) voor elk dezer lichamen bestaan er twee evenwijdige vlakken α en β, waartussen het lichaam gelegen is;

b) de oppervlakten van de doorsneden van het lichaam met vlakken evenwijdig aan α en β zijn rationale functies van hoogstens de derde graad in de afstand van de doorsnede tot één der vlakken α en β.

---

[1]) Vgl.: Dr. Voellmy, t.a.p.

Op grond van § 2 geldt nu voor deze *„Simpson'se lichamen"* de inhoudsformule:

$$I = \tfrac{1}{6}h(G + 4M + B),$$

waarin h de afstand der vlakken α en β is, G de oppervlakte van de doorsnee van het lichaam met α („grondvlak"), B de oppervlakte van de doorsnee van het lichaam met β („bovenvlak") en M de oppervlakte van de doorsnee van het lichaam met het vlak, dat evenver van α als van β ligt („middendoorsnede").

4. Aan de voorwaarden van § 3 wordt o.a. voldaan door:
het prisma, de pyramide, de cylinder, de kegel, de bol;
de afgeknotte pyramide en kegel, de bolschijf, het bolsegment en de bolschil; de prismoide;
het afgeknotte driezijdig prisma, waarvan één der zijvlakken als grondvlak wordt beschouwd,
d.i. dus voor zo goed als alle in ons schoolprogram voorkomende lichamen.

Zie voor het bewijs: § 6.

5. *Afleiding van inhoudsformules uit de Formule van Simpson.*

Prisma en cylinder (recht en scheef).

$$\begin{aligned} I &= \tfrac{1}{6}h(G + 4M + B) \\ &= \tfrac{1}{6}h(G + 4G + G) \\ &= hG. \end{aligned}$$

Pyramide en kegel.

$$\begin{aligned} I &= \tfrac{1}{6}h(G + 4M + B) \\ &= \tfrac{1}{6}h(G + 4 \,.\, \tfrac{1}{4}G + 0) \\ &= \tfrac{1}{3}hG. \end{aligned}$$

$M = \tfrac{1}{4}G$ krachtens de stelling: de oppervlakken der doorsneden evenwijdig aan het grondvlak van pyramide of kegel verhouden zich als de kwadraten van de afstanden tot de top.

Bol.

$$\begin{aligned} I &= \tfrac{1}{6}h(G + 4M + B) \\ &= \tfrac{1}{6} \,.\, 2R(0 + 4\pi R^2 + 0) \\ &= \tfrac{4}{3}\pi R^3. \end{aligned}$$

Afgeknotte pyramide.

$$\begin{aligned} I &= \tfrac{1}{6}h(G + 4M + B) \\ &= \tfrac{1}{6}h\,\{G + (\sqrt{G} + \sqrt{B})^2 + B\} \\ &= \tfrac{1}{3}h(G + B + \sqrt{BG}). \end{aligned}$$

Dat $2\sqrt{M} = \sqrt{G} + \sqrt{B}$ blijkt voor de pyramide a.v. (zie fig. 1):
$G : M : B = g^2 : m^2 : b^2$
(eigenschap van gelijkv. veelhoeken)

$$\sqrt{G} : \sqrt{M} : \sqrt{B} = g : m : b$$

Uit: $2m = g + b$ (eigenschap middenparallel) volgt nu:

$$2\sqrt{M} = \sqrt{G} = \sqrt{B}.$$

Voor de kegel verloopt het bewijs analoog, als we de zijden g, m en b der drie evenwijdige vlakken door de stralen der cirkels van G, M en B vervangen.

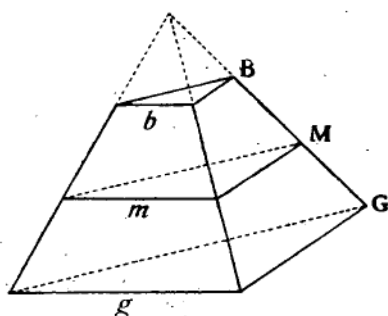


Fig. 1.

Bolsegment.

Hier is (zie fig. 2):

$G = \pi r^2 = \pi h(2R - h)$,
$M = \pi \varrho^2 = \pi \,.\, \frac{1}{2}h \,.\, (2R - \frac{1}{2}h)$ en
$B = 0$,

zodat:

$$I = \frac{\pi}{6} h\{h(2R-h) + 2h(2R - \tfrac{1}{2}h\}$$
$$= \tfrac{1}{3}\pi h^2(2R - h).$$

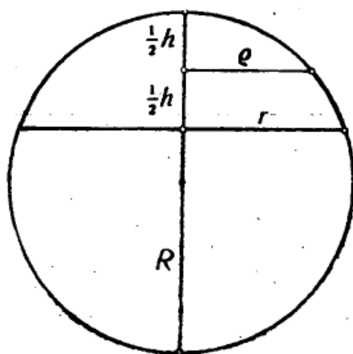


Fig. 2

Bolschijf.

Hier is (zie fig. 3):

$$r_1^2 + d^2 = R^2$$
$$\varrho^2 + (d + \tfrac{1}{2}h)^2 = R^2$$

en $r_2^2 + (d + h)^2 = R^2$,

waaruit door eliminatie van R en d volgt:

$$\varrho^2 = \tfrac{1}{2}r_1^2 + \tfrac{1}{2}r_2^2 + \tfrac{1}{4}h^2,$$

een formule, die veel analoogs heeft met de zwaartelijnformule in een driehoek.

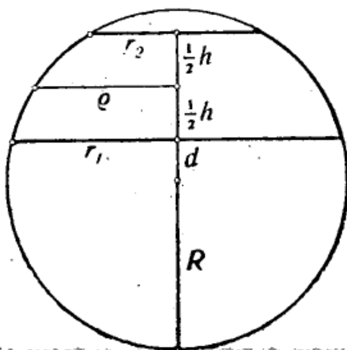


Fig. 3.

Men vindt nu:

$$I = \frac{\pi}{6} h\{r_1^2 + (2r_1^2 + 2r_2^2 + h^2) + r_2^2\}$$
$$= \tfrac{1}{6}\pi h\{3r_1^2 + 3r_2^2 + h^2\}.$$

Prismoide.

We laten de formule $I = \frac{1}{6}h(G + 4M + B)$ onherleid.

Afgeknot driezijdig prisma.

Hier is (zie fig. 4):

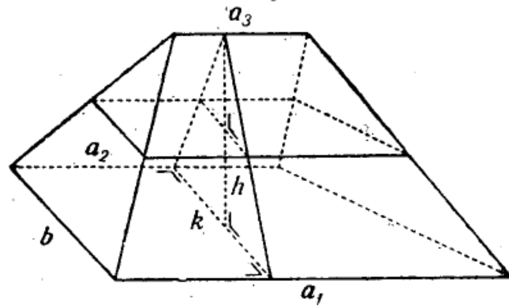


Fig. 4.

$$G = k \cdot \frac{a_1 + a_2}{2}$$

$$M = \tfrac{1}{2}k \cdot \frac{\frac{1}{2}(a_1 + a_3) + \frac{1}{2}(a_2 + a_3)}{2},$$

dus $$I = \tfrac{1}{6}h\left\{k \cdot \frac{a_1 + a_2}{2} + k\,\frac{(a_1 + a_3)}{2} + k\,\frac{(a_2 + a_3)}{2}\right\}$$

$$= \tfrac{1}{6}kh\,(a_1 + a_2 + a_3)$$

$= \frac{1}{3} \times$ „rechte doorsnee" $\times$ „som evenw. ribben"

Bolschil.

Hier is (zie fig. 5):

$$\begin{aligned} M &= \pi(r_1^2 - r_2^2) \\ &= \pi(r_1 + r_2)(r_1 - r_2) \\ &= \pi \cdot PD \cdot PC \\ &= \pi \cdot PA \cdot PB \\ &= \tfrac{1}{4}\pi k^2. \end{aligned}$$

$$G = B = 0$$

Dus: $$I = \tfrac{1}{6}h(o + \pi k^2 + o) = \tfrac{1}{6}\pi k^2 h.$$

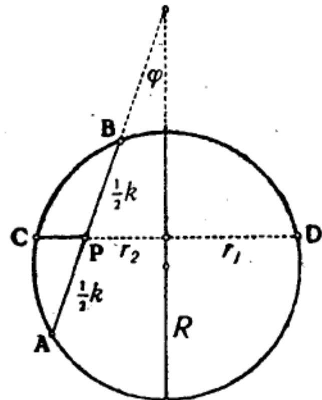


Fig. 5.

6. *Berekening van* $D(x)$ voor de in § 5 genoemde lichamen.

a) *Prisma's en Cylinders*:

$D(x) = G$, dus van de nulde graad in x.

b) *Pyramiden en Kegels*:

Noemt men de afstand van een doorsnee evenwijdig aan het grondvlak tot de top x, dan is:

$$D(x) : G = x^2 : h^2, \text{ dus } D(x) = \frac{x^2}{h^2} G,$$

d.i. een functie van de tweede graad in x.

c) *Bol en boldelen.*

Onderstel dat het middelpunt van de bol in het punt (R, o, o) valt. Voor een doorsnee $\perp$ x-as geldt (zie fig. 6):

$$D(x) = \pi \varrho^2$$
$$= \pi x (2R - x),$$

d.i. een functie van de tweede graad in x.

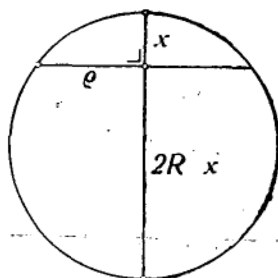


Fig. 6.
2R x moet zijn: 2R — x.

Ook een *bolsegment* voldoet bijgevolg aan de voorwaarden van § 3.

Zij de afstand van een doorsnee tot het bovenvlak van een *bolschijf* x', dan kan men $x' = x - p$ nemen, als men de pijl van het bolsegment, dat aan de andere zijde van het bovenvlak van de schijf ligt dan deze schijf, door p voorstelt.

$D(x) = \pi x \,.\, (2R - x)$ gaat nu over in

$$D(x') = \pi (x' + p)(2R - x' - p),$$

d.i. weer een functie van de tweede graad in x.

Voor de oppervlakte van een doorsnee $D(x)$ vinden we bij de *bolschil* (zie fig. 7).

$$D(x) = \pi (\varrho_1{}^2 - \varrho_2{}^2)$$
$$= \pi \,.\, PB \,.\, PA$$
$$= \pi \frac{x}{\cos \varphi} \cdot \frac{h - x}{\cos \varphi},$$

d.i. een functie van de tweede graad in x.

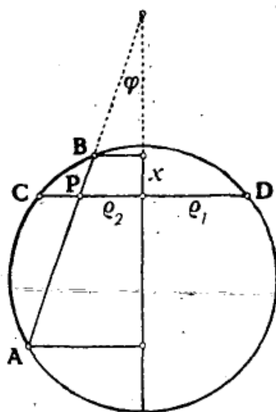


Fig. 7.

Prismoide.

Onderstel dat de oppervlakten van grond- en bovenvlak G en B zijn; projecteer een doorsnee, evenwijdig

aan grond- en bovenvlak op het grondvlak, en het bovenvlak eveneens (zie fig. 8).

Onderstel, dat de afstand van de doorsnee tot het bovenvlak van de prismoide x is en dus tot het grondvlak $h - x$. Noem de gezamenlijke oppervlakten van de projecties der zijvlakken, die twee hoekpunten in het grondvlak en één in het bovenvlak hebben α, en de gezamenlijke oppervlakken van de projecties der zijvlakken, die twee hoekpunten in het bovenvlak en één in het grondvlak hebben, β, dan vinden we:

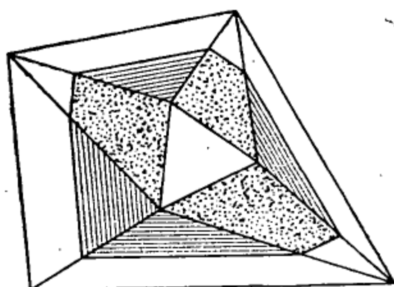


Fig. 8.

$$D(x) = B + \frac{x^2}{h^2}\alpha + \left\{1 - \frac{(h-x)^2}{h^2}\right\}\beta,$$

d.i. een functie in x van hoogstens de tweede graad.

Opmerkingen. 1. Is $\alpha = \beta$, dan wordt $D(x)$ van de eerste graad in x. Dit is bv. het geval bij een prisma, waarvan een opstaand zijvlak als grondvlak wordt beschouwd (zie fig. 9).

Men vindt: $D(x) = a'b' \sin \varphi$

$$= a \cdot \frac{x}{h} b \cdot \sin \varphi$$

$$= \frac{x}{h} \cdot G,$$

dus een functie van de eerste graad in x.

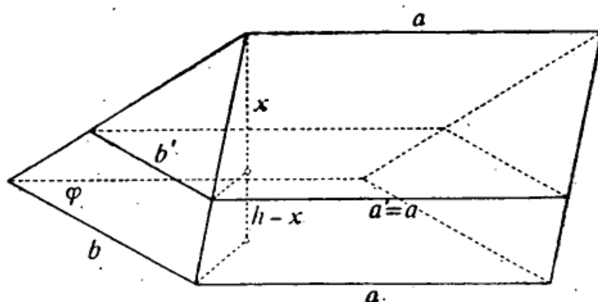


Fig. 9.

2. In fig. 8 ligt de projectie van het bovenvlak geheel binnen het grondvlak. De figuur kan ook minder eenvoudig uitvallen. De gevonden formule gaat door, als men neemt:

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} \delta_i \, . \cos \varphi_i \quad \text{en} \quad \beta = \sum_{i=1}^{m} \delta_i \, . \cos \varphi_i \, ,$$

waarin δ_i $(i = 1, 2, \ldots n)$ de oppervlakken der zijvlakken van de eerste, en δ_i $(i = 1, 2, \ldots m)$ die van de tweede reeks zijn en φ_i de hoeken van deze zijvlakken met het grondvlak.

7. *a*) Behalve de in § 6 besproken lichamen, waarin $D(x)$ een rationale functie in x is van de nulde, de eerste of de tweede graad, zijn er ook nog „*Simpson'se lichamen*", waarbij $D(x)$ van de derde graad is. In ons schoolprogram komen ze niet voor, maar we kunnen gemakkelijk constructievoorschriften voor enkele van deze lichamen geven.

Voorbeeld I; zie fig. 10.

De doorsneden evenwijdig met het vlak $x = 0$ zijn rechthoeken

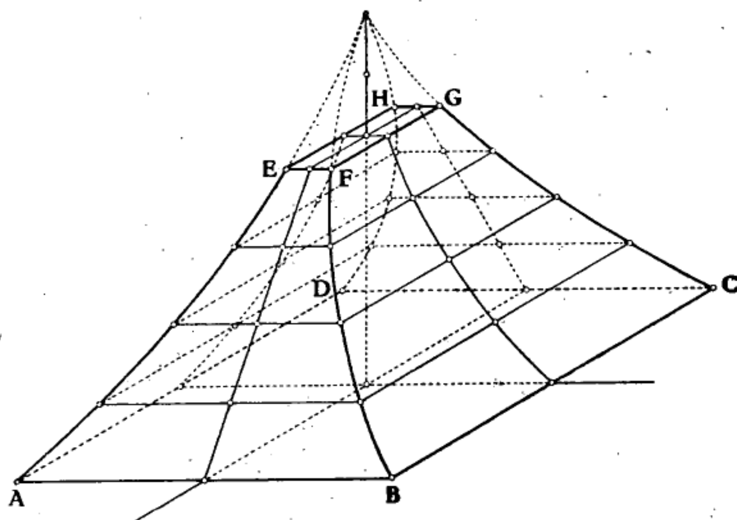


Fig. 10.

met zijden $2x$ en $\frac{1}{6}x^2$, zodat $D(x) = \frac{1}{3}x^3$. De middelste punten der doorsneden liggen op de x-as. Het lichaam is getekend voor $2 \leqq (x) \leqq 6$.

Het is begrensd door grondvlak ABCD (opp. $= 72$), door bovenvlak EFGH (opp. $= 2\frac{2}{3}$), door 2 vlakke en door 2 gebogen opstaande zijvlakken. $I = 106\frac{2}{3}$.

Voorbeeld II; zie fig. 11.

Ook hier zijn de doorsneden evenwijdig met het vlak $x = 0$ rechthoeken. De zijden zijn x en $x(6 - x)$, zodat $D(x) = 6x^2 - x^3$. In de grensvlakken $x = 0$ en $x = 6$ liggen opvolgend het punt T en het lijnstuk AB van het lichaam. De hoogte is 6.

Het lichaam is begrensd door 2 platte vlakdelen en één gebogen vlakdeel. In fig. 10 is slechts de helft getekend; de tweede helft is symmetrisch met de getekende t.o.v. vlak TAB.

De middendoorsnee is een rechthoek van 3 bij 9.

De inhoud van het lichaam is 108.

b) Een eenvoudig Simpson's lichaam, dat niet op het schoolprogram voorkomt, is de *omwentelingsparaboloïde*, die men krijgt

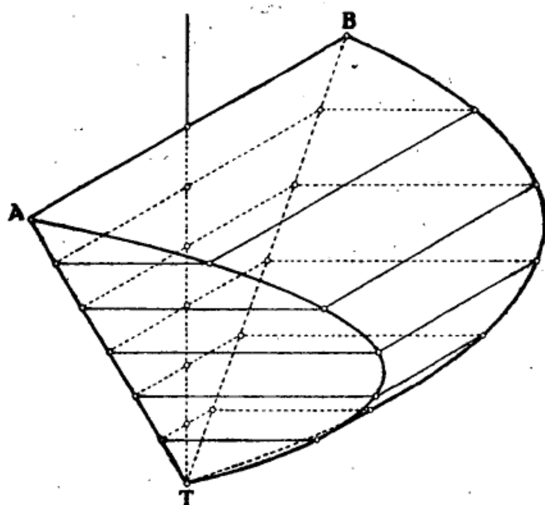


Fig. 11.

door de kromme $y^2 = x$ van het vlak $z = 0$ om de x-as te laten wentelen.

Men vindt:

$$\mathrm{D}(x) = \pi y^2$$

$$= \pi x, \text{ zodat } \int_0^h \mathrm{D}(x)dx = \tfrac{1}{2}\pi h^2.$$

Hier is: $\mathrm{G} = \pi h$, $\mathrm{M} = \frac{1}{2}\pi h$, $\mathrm{B} = 0$, dus volgens de formule van Simpson vinden we eveneens:

$$\mathrm{I} = \tfrac{1}{6}h(\pi h + 2\pi h + 0) = \tfrac{1}{2}\pi h^2.$$

Wenteling om de y-as geeft: $\mathrm{D}(y) = \pi x^2$
$= \pi y^4$,

zodat $$\int_0^h \mathrm{D}(y)dy = \frac{\pi}{5} h^5.$$

Hier is: $G = \pi h^4$, $M = \frac{1}{16}\pi h^4$ en $B = 0$, zodat de formule van Simpson zou geven:

$$I = \tfrac{1}{6}h(\pi h^4 + \tfrac{1}{4}\pi h^4 + 0) = \tfrac{5}{24}\pi h^4.$$

Deze formule geldt echter niet voor het lichaam, omdat $D(y)$ van de vierde graad in y is. Het antwoord kan als „een benadering" van het juiste antwoord worden beschouwd.

c) Bestaat een lichaam uit enige Simpson'se lichamen, dan zal i.h.a. de inhoud niet met de formule van Simpson te bepalen zijn.

Voorbeeld. Beschouw twee elkaar rakende halve bollen met de platte grensvlakken evenwijdig, en zó dat de verbindingslijn der middelpunten loodrecht op die grensvlakken staat. De afstand der platte grensvlakken is $2r$.

Simpson zou geven:

$$I = \tfrac{1}{6} \cdot 2r(\pi r^2 + 0 + \pi r^2) = \tfrac{2}{3}\pi r^2 \text{ i.p.v. } \tfrac{4}{3}\pi r^2.$$

Er bestaan echter ook lichamen, die *niet* aan de voorwaarden van § 3 voldoen en waarvan de inhoud tòch met de formule van Simpson is te bepalen.

Neemt men drie halve bollen „recht boven elkaar", zodat de afstand tussen twee opeenvolgende platte grensvlakken telkens r is, dan geldt voor het geheel:

$$G = \pi r^2,\ M = \tfrac{3}{4}\pi r^2,\ B = 0.$$

Simpson geeft:

$$I = \tfrac{1}{6} \cdot 3r(\pi r^2 + 3\pi r^2 + 0) = 2\pi r^3,$$

het juiste antwoord.

Plaatst men op een kubus met ribbe a een regelmatige vierzijdige pyramide met hoogte $h = \frac{1}{4}a(3 + \sqrt{17})$, zodat het grondvlak van de pyramide met het bovenvlak van de kubus samenvalt, dan voldoet het gehele lichaam niet aan de voorwaarden van § 3, terwijl het antwoord, dat men met de formule van Simpson voor de inhoud vindt, in dit speciale geval toch juist is.

VERSCHEIDENHEDEN

door

Prof. Dr. O. BOTTEMA

XXV. DE MOMENTENSTELLING.

Bij het bewijs der stelling: *het moment van de resultante van een stelsel in een vlak gelegen krachten ten opzichte van een punt is gelijk aan de som van de momenten van die krachten ten opzichte van dat punt,* is naar ik meen de volgende gang van zaken vrij algemeen gebruikelijk. Het bewijs wordt eerst gegeven voor twee krachten met snijdende werklijnen, daarna voor twee krachten met evenwijdige werklijnen en ten slotte voor een willekeurig stelsel.

Het wil mij voorkomen dat het aldus geleverde bewijs een overbodig element bevat en anderzijds onvolledig is.

Als het eerste gedeelte behandeld is (aan de hand van de figuur van het parallelogram van krachten) lijkt het mij niet nodig de stelling voor twee evenwijdige krachten afzonderlijk te bewijzen, althans niet wanneer de regel voor het samenstellen van evenwijdige krachten afgeleid is op de wijze waarop dit veelal geschiedt. In dit geval is immers door het invoeren van twee tegengestelde krachten het bepalen van de resultante geheel herleid tot parallellogramconstructies en is dus de geldigheid van de momentenstelling reeds gewaarborgd door het eerste deel van de bewijsvoering. Natuurlijk is er weinig bezwaar tegen om voor twee evenwijdige krachten de momentenstelling nog eens rechtstreeks te verifiëren, maar principiëel noodzakelijk is het niet.

Een tweede opmerking betreft het laatste deel van het bewijs. Men ontmoet daar veelal de volgende redenering. Kies de n gegeven krachten in de een of andere volgorde: K_1, K_2, $K_3 \ldots K_n$. Stel K_1 en K_2 samen tot R_1, R_1 en K_3 tot R_2 enz. en pas daarbij telkens de momentenstelling voor twee krachten toe. Afgezien van de vraag of het geen aanbeveling verdient het bewijs met volledige inductie te redigeren, zal men toch de mogelijkheid niet over het hoofd mogen zien, dat een der resultantes R_m niet bestaat doordat de krachten K_1, $K_2, \ldots K_{m+1}$ gelijkwaardig zijn met een koppel. Blijkbaar zal men goed doen de volgende stelling uit te spreken

(of in de redactie der momentenstelling op te nemen): Als een aantal krachten gelijkwaardig zijn met een koppel, dan is de som der momenten van deze krachten gelijk aan het moment van dat koppel.

Het is mij welbekend, dat in verschillende leerboeken de momentenstelling en de stellingen die zich daaromheen groeperen behandeld worden op een wijze, die volkomen correct is, maar het boven aangegeven betoog wordt blijkens mijn ervaring op vele scholen gevolgd.

Het gehele complex van stellingen betreffende het samenstellen van krachten in het platte vlak en in de ruimte, kan op zeer verschillende manieren worden opgebouwd (vgl. b.v. ook de opmerking in *Verscheidenheden* XVIII). Een kritische bespreking van deze methodes en van hun didactische voor- en nadelen zou althans door schrijver dezes zeer worden gewaardeerd.

XXVI. HET VRAAGSTUK VAN MALFATTI.

Bij deze welbekende opgave wordt de constructie gevraagd van drie cirkels C_1', C_2' en C_3', die elkaar twee aan twee raken en waarbij C_1' raakt aan de zijden A_1A_2 en A_1A_3 van een gegeven driehoek $A_1A_2A_3$, terwijl C_2' raakt aan A_2A_3 en A_2A_1 en C_3' aan A_3A_1 en A_3A_2. Het vraagstuk werd gesteld door Malfatti in 1803 en door hem opgelost met behulp van een algebraische analyse. Zeer bekend is de buitengewoon elegante meetkundige oplossing, die Steiner in 1826 zonder bewijs mededeelde en die men, veelal met de door Hart in 1857 gegeven bewijsvoering in verschillende leerboeken vindt. Steiner heeft ook uitbreidingen van de opgave aangegeven en de oplossing ervan medegedeeld; de eerste is die waarbij de gegeven rechten A_2A_3, A_3A_1 en A_1A_2 vervangen worden door cirkels; verdere generalisaties betreffen de figuur van drie cirkels op een bol en van drie kegelsneden op een kwadratisch oppervlak. In de negentiende eeuw hebben een groot aantal wiskundigen zich met het probleem bezig gehouden, o.a. Cayley (1852), Schellbach (die in 1853 een zeer fraaie goniometrische oplossing bekend maakte) en Clebsch (die in 1857 de oplossing van Schellbach uitbreidde tot drie kegelsneden op een kwadratisch oppervlak en daarbij gebruik maakte van elliptische functies). Laat men bij het oorspronkelijke vraagstuk van Malfatti ook aangeschreven en elkaar inwendig rakende cirkels toe, dan zijn er in 't geheel 32 (reële) oplossingen, die men b.v. alle vindt aangegeven bij Pampuch (1904). De genoemde generalisaties hebben zelfs, zoals uit het onderzoek van Clebsch blijkt, 64 oplossingen.

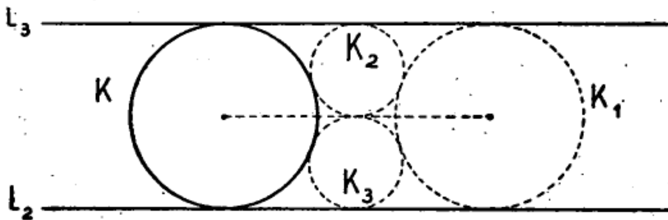
De literatuur over het probleem is dusdanig omvangrijk en bovendien zo verspreid, dat het vrijwel ondoenlijk is haar geheel te raadplegen. Voor zover wij hebben kunnen nagaan, heeft echter het hier volgende speciale geval van de generalisatie van Steiner niet de aandacht getrokken. Het is aantrekkelijk door de eenvoud der uitkomst en door de mogelijkheid van een bepaalde stereometrische interpretatie.

Het vraagstuk van Malfatti-Steiner luidt dus als volgt: gegeven zijn drie cirkels C_1, C_2 en C_3. Gevraagd worden drie cirkels C_1', C_2' en C_3', zodat C_1' raakt aan C_2, C_3, C_2', C_3', de cirkel C_2'

aan C_3, C_1, C'_3, C'_1 en C'_3 aan C_1, C_2, C'_1 en C'_2, Wij kiezen nu het bijzondere geval, waarbij *ook de gegeven cirkels* C_1, C_2, C_3 *elkaar twee aan twee raken.*

Natuurlijk kan deze opgave volgens de algemene methode van Steiner opgelost worden. Wij kiezen een andere weg, waarbij de eenvoud van het probleem onmiddellijk blijkt. Voert men nl. een *inversie* uit met het raakpunt van C_2 en C_3 tot centrum, dan gaan deze cirkels over in twee evenwijdige rechten l_2 en l_3 en C_1 in een cirkel K, die aan beide raakt (fig. 1). Voor deze figuur is de constructie der gevraagde cirkels K_i uiterst eenvoudig. Is $4r$ de afstand van l_2 en l_3, dan zijn de stralen van K_2 en K_3 gelijk aan r, die van K_1 gelijk aan $2r$, terwijl de afstand van de middelpunten van K en K_1 gelijk is aan $4r\sqrt{2}$. En blijkbaar heeft het vraagstuk steeds *twee* (reële) oplossingen.

Ons doel is de *berekening van de stralen* R'_1, R'_2 *en* R'_3 van C'_1, C'_2 en C'_3 als de stralen R_1, R_2 en R_3 van de gegeven cirkels C_1,



C_2 en C_3 (en daarmede dus de figuur van deze cirkels) gegeven zijn. Daartoe onderwerpen wij de figuur 1 aan een willekeurige inversie. Zij O het centrum en kiezen wij een rechthoekig assenstelsel met O tot oorsprong en zo dat de X-as evenwijdig is met l_2 en l_3; voor de macht van inversie kunnen wij zonder bezwaar de eenheid nemen. De inversie wordt dan voorgesteld door

$$x' = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad y' = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

en hieruit blijkt zonder moeite, dat de cirkel met middelpunt (x_0, y_0) en de straal ϱ overgaat in een cirkel, waarvan de straal gelijk is aan $\left|\frac{\varrho}{x_0^2 + y_0^2 - \varrho^2}\right|$. Heeft het middelpunt van K de coördinaten a, b, dan zijn die van dat van $K_1 = (a + 4r\sqrt{2}), b$. Hieruit volgt

$$R_1 = \left|\frac{2r}{a^2 + b^2 - 4r^2}\right|, \quad R'_1 = \left|\frac{2r}{(a + 4r\sqrt{2})^2 + b^2 - 4r^2}\right|$$

De rechten l_2 en l_3 gaan door de inversie over in cirkels, waarvan de stralen zijn.

$$R_2 = \frac{1}{2\,|\,b - 2r\,|}, \quad R_3 = \frac{1}{2\,|\,b + 2r\,|}$$

Wij zullen nu eerst veronderstellen, dat O tussen l_1 en l_2 gekozen wordt en buiten K. De cirkels C_1, C_2 en C_3 raken elkaar dan twee aan twee *uitwendig*. Men heeft $b - 2r < 0, b + 2r > 0, a^2 + b^2 > 4r^2$ dus

$$R_2 = \frac{1}{2(2r - b)}, \quad R_3 = \frac{1}{2(2r + b)}, \quad R_1 = \frac{2r}{a^2 + b^2 - 4r^2}$$

waaruit volgt

$$a = \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{1}{R_2R_3} + \frac{1}{R_3R_1} + \frac{1}{R_1R_2}\right)}, \quad b = \tfrac{1}{4}\left(\frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_2}\right), \quad r = \tfrac{1}{8}\left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_2}\right)$$

zodat men voor één der oplossingen heeft:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{R_1'} &= \frac{1}{R_1} + \frac{2}{R_2} + \frac{2}{R_3} + 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{R_2R_3} + \frac{1}{R_3R_1} + \frac{1}{R_1R_2}\right) \\
&\text{Evenzo heeft men} \\
\frac{1}{R_2'} &= \frac{2}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{2}{R_3} + 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{R_3R_2} + \frac{1}{R_3R_1} + \frac{1}{R_1R_2}\right) \\
\frac{1}{R_3'} &= \frac{2}{R_1} + \frac{2}{R_2} + \frac{1}{R_3} + 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{R_2R_3} + \frac{1}{R_3R_1} + \frac{1}{R_1R_2}\right)
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

terwijl de tweede oplossing wordt gevonden door in de rechterleden de wortelvorm door het tegengestelde te vervangen en daarna de modulus van het rechterlid te nemen. Terwijl de eerste oplossing bestaat uit drie cirkels, die elkaar twee aan twee uitwendig raken, zijn voor de tweede verschillende omstandigheden mogelijk: zij bestaat uit drie elkaar uitwendig rakende cirkels of uit drie cirkels, waarvan er twee elkaar uitwendig raken, terwijl de derde de beide andere inwendig raakt. Van de juistheid van deze opmerking overtuigt men zich het beste door het punt O resp. te kiezen buiten elk der cirkels K_1, K_2 en K_3, dan wel binnen een van deze. Neemt men O op de omtrek van een dezer cirkels, dan wel in het raakpunt van twee dezer cirkels, dan komen in de oplossing één, resp. twee rechte lijnen voor.

Neemt men tenslotte O buiten de door l_2 en l_3 begrensde strook, dan wel binnen K, dan ontstaat het geval waarbij in de figuur der gegeven cirkels twee inwendige en één uitwendige raking voorkomen.

Is C_1 de cirkel, welke C_2 en C_3 inwendig raakt, dan moet men in de oplossing (1) de grootheid R_1 door $-R_1$ vervangen en hetzelfde geldt voor de tweede oplossing. Beide oplossingen bestaan nu uit cirkels, die elkaar twee aan twee uitwendig raken. Men kan overigens (1) en de overeenkomstige uitdrukking, waarin de wortelvorm tegengesteld is genomen, als de algemene oplossing voor elk geval opvatten, indien men afspreekt ook negatieve waarden voor een straal toe te laten en af te spreken, dat twee uitwendig rakende cirkels stralen van het zelfde teken, inwendig rakende zulke van verschillend teken bezitten. Er zijn twee cirkels, welke de drie gegeven cirkels raken. Ook dit blijkt onmiddellijk uit fig. 1. In deze figuur zijn de stralen dezer cirkels beide $2r$, de coördinaten van hun middelpunten $a \pm 4r$. Na inversie vindt men voor de stralen dezer „ingeschreven" cirkels van de figuur C_1, C_2, C_3:

$$\varrho_{1,2} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \pm 2\sqrt{\left(\frac{1}{R_2R_3} + \frac{1}{R_3R_1} + \frac{1}{R_1R_2}\right)} \quad . \; . \; . \; (2)$$

uitdrukkingen, die grote analogie vertonen met (1); men vindt ze reeds bij Steiner (Werke I, pg. 61—63, met een verhelderende aantekening van Weierstrasz, pg. 524). Terwijl ϱ_1 altijd positief is, kan $\frac{1}{\varrho_2}$ groter dan, gelijk aan, of kleiner dan nul zijn. Een der cirkels raakt de gegeven cirkels alle uitwendig, de andere raakt hen alle uitwendig of alle inwendig (of is in het overgangsgeval een rechte). Ook deze eigenschappen leest men gemakkelijk uit fig. 1 af. Steiner bewijst (2) door een rechtstreekse berekening met behulp van de hoogtelijnformule voor een driehoek. Uit (1) en (2) kan men een groot aantal relaties tussen de stralen R_i der gegeven cirkels, de stralen R_i' der cirkels van Malfatti en de stralen ϱ_i der raakcirkels afleiden; wij noemen slechts

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_1'} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_2'} = \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_3'}$$

Over de formules (1) willen wij nog enkele opmerkingen maken. Heeft men bij de figuur S der gegeven cirkels $C_1C_2C_3$ een der beide stellen S' van cirkels C_1', C_2', C_3' van Malfatti gevonden, dan kan men op S' de constructie herhalen; één van de beide stellen cirkels van Malfatti, die bij S' behoren, is blijkbaar S. Voortgaande ontstaat een zich in twee richtingen uitstrekkende *keten van cirkeltripels* met de eigenschap, dat van twee opvolgende schakels elk een Malfatti-figuur is van de andere.

Door *iteratie* van de formule (1) kan men de stralen van het n^{de}

drietal indrukken in de stralen van de cirkels, waarvan men is uitgegaan. Past men (1) toe op $\frac{1}{R_i'}$, dan krijgt men, de negatieve wortel kiezend, $\frac{1}{R_i}$ terug. Voor het nieuwe stel ontstaat er

$$\frac{1}{R_1''} = \frac{17}{R_1} + \frac{16}{R_2} + \frac{16}{R_3} + 20\sqrt{2}\left(\frac{1}{R_2R_3} + \frac{1}{R_3R_1} + \frac{1}{R_1R_2}\right) \quad \text{en cycl.}$$

terwijl voor de volgende schakels gevonden wordt

$$\frac{1}{R_1^{(3)}} = \frac{161}{R_1} + \frac{162}{R_2} + \frac{162}{R_3} + 198\sqrt{2}\left(\frac{1}{R_2R_3} + \frac{1}{R_3R_1} + \frac{1}{R_1R_2}\right)$$

$$\frac{1}{R_1^{(4)}} = \frac{1601}{R_1} + \frac{1600}{R_2} + \frac{1600}{R_3} + 1960\sqrt{2}\left(\frac{1}{R_2R_3} + \frac{1}{R_3R_1} + \frac{1}{R_1R_2}\right)$$

Stelt men

$$\frac{1}{R_1^{(2p)}} = \frac{a_{2p}+1}{R_1} + \frac{a_{2p}}{R_2} + \frac{a_{2p}}{R_3} + b_{2p}\sqrt{2}\left(\frac{1}{R_2R_3} + \frac{1}{R_3R_1} + \frac{1}{R_1R_2}\right)$$

$$\frac{1}{R_1^{(2p+1)}} = \frac{a_{2p+1}+1}{R_1} + \frac{a_{2p+1}+2}{R_2} + \frac{a_{2p+1}+2}{R_3} + b_{2p+1}\sqrt{2}\left(\frac{1}{R_2R_3} + \frac{1}{R_3R_1} + \frac{1}{R_1R_2}\right)$$

dan vindt men:

$$a_{2p+1} = 10a_{2p} - a_{2p-1},\ a_{2p} = 10a_{2p-1} - a_{2p-2} + 16,\ b_k = 10b_{k-1} - b_{k-2}$$

uit welke recurrente betrekkingen men de stralen der tripels berekenen kan.

De figuur van drie elkaar twee aan twee rakende cirkels $C_1C_2C_3$ vormt met een stel Malfatti-cirkels $C_1'C_2'C_3'$ een configuratie van 6 cirkels, waarvan elke vier der overige raakt. Beeldt men de cirkels van het vlak af op de punten van een driedimensionale projectieve ruimte, waarbij de puntcirkels met de punten van een kwadratisch oppervlak Ω corresponderen, dan komt met de configuratie een *octaeder* overeen, waarvan de ribben aan Ω raken. De constructie, die aan de orde was, komt dus neer op de volgende stereometrische opgave: *om een kwadratisch oppervlak* Ω (b.v. om een bol) *een octaeder te construeren, welks ribben aan* Ω *raken en waarvan de hoekpunten van een zijvlak gegeven zijn.* Dit probleem blijkt dus twee oplossingen te hebben. En met de bovengenoemde keten correspondeert een keten van driehoeken, alle omgeschreven om Ω en met de eigenschap, dat twee opvolgende driehoeken overstaande zijvlakken zijn van een omgeschreven octaeder.

Uit de boven afgeleide betrekkingen tussen de stralen der cirkels blijkt, dat deze als men in de ene richting van de keten gaat steeds kleiner, en dus in de andere richting steeds groter worden, een omstandigheid, die ook uit de figuur blijkt. In de ene richting gaande zal dus het cirkeltripel verschrompelen tot een enkel punt. Met de vraag hoe dit punt ten opzichte van de drie oorspronkelijke cirkels gelegen is, moge deze bescheiden bijdrage tot de kennis van het merkwaardige probleem van Malfatti worden besloten.

BOEKBESPREKINGEN.

Prof. Dr C. H. van Os, Vectoranalyse. Delftsche Uitgevers Maatschappij, Delft 1949. 113 blz. *f* 4,50.

Verschenen als handleiding No. 85 bij het onderwijs aan de Technische Hogeschool te Delft, kan toch ook anderen dan studenten dit degelijke en prettig leesbare werk van den Delftsen hoogleraar voor een snelle inleiding tot de Vectoranalyse ten zeerste worden aanbevolen.

„Noodgedwongen" geeft schr. het veel gebruikte systeem van Gibbs, hoewel hem een opbouw, die zich nauwer bij de quaternionen van Hamilton zou aansluiten, liever ware geweest.

Uiteraard zijn niet de hoogste eisen aan de strengheid gesteld; toch had het m.i. aanbeveling verdiend, te bewijzen, dat de in § 4 afgeleide voorwaarden behalve noodzakelijk ook voldoende zijn, al was het alleen om de vaak voorkomende lichtvaardigheid ten deze niet in de hand te werken.

Vergeleken bij de oudere, vooral Duitse literatuur over de Vectoranalyse, heeft de schrijver naar een prijzenswaardige beknoptheid gestreefd. Naar de in § 8 afgeleide rekenregels had echter bij de toepassingen vaker kunnen zijn verwezen.

Vooral bij de afleiding van de formules van Serret en Frenet in de theorie der ruimtekrommen heeft het ons getroffen, hoe sierlijk de vectoranalytische bewijzen kunnen zijn; minder gelukkig is daarbij de notatie der eenheidsvectoren, daar hierbij, voor twee van de drie, Griekse letters worden gebruikt, waarbij nog komt, dat ook coëfficiënten met deze lettersoort worden aangegeven.

Noemen wij nog de voortreffelijke behandeling van de centrale beweging, van de veldentheorie, van de integraalstellingen van Gauss en Stokes en de wijze, waarop daaruit andere stellingen worden afgeleid.

De uitgave is typografisch uitstekend verzorgd; alleen had o.i. een vermelding der vrij talrijke drukfouten niet mogen ontbreken.

THYSEN.

Dr H. J. E. Beth, Kinematika in het platte vlak. Noorduyn's Wetenschappelijke Reeks nr. 32. Gorinchem 1949. 239 blz. *f* 5,60.

Men kan op goede grond op het hierbovengenoemde werk aanmerkingen maken; men kan het, eveneens terecht, als rijk aan inhoud en origineel prijzen. Een referent, die zijn taak ernstig opvat, kan na lezing en bestudering aan het slot allicht constateren, dat hij dankbaar is zowel voor de kennismaking met het boek als voor het beeindigen van deze niet gemakkelijke opdracht.

De kritiek betreft voornamelijk de, overwegend meetkundig getinte, vorm. Voor wie is dit boekje eigenlijk geschreven? Enkele definities en verklaringen in het begin doen een elementaire uiteenzetting verwachten. De projectieve transformatie wordt uitgelegd; de brandpunten, ook van een kromme van hogere graad dan de tweede, worden gedefiniëerd. Maar de lezer, die verderop de Schrijver in zijn

betoog wil volgen en zich van de juistheid der, soms zeer summier bewezen, soms vrijwel slechts aangegeven, conclusies wil overtuigen, heeft daarbij een solide kennis van algebraïse- en differentiaalmeetkunde nodig; en niet alleen kennis, maar ook geoefendheid. Dit komt tot uiting vooral van af het punt, waar de Schrijver de beweging in het platte vlak in de driedimensionale ruimte gaat afbeelden volgens een methode, die van Study afkomstig schijnt te zijn, maar dan wel door hem sterk naar eigen behoefte en smaak is ontwikkeld.

Laten wij de inhoud in het kort resumeren. Het begin geeft, wat men kon verwachten: snelheids- en versnellingsdistributies; constructies van raaklijnen en kromtestralen; bijzondere figuren en punten bij de beweging (buig- en keercirkels, punt van Ball, punten van Burmester); bijzondere bewegingen (elliptiese, cardioïdale, conchoïdale bewegingen). Dit alles wordt toegelicht met een rijkdom van voorbeelden en gekruid door meetkundige opmerkingen.

Op p. 57 begint de Schrijver dan zijn beschouwingen over de algebraïse bewegingen, voorlopig vooral de rationale; op p. 111 introduceert hij de reeds genoemde afbeelding, die hem dan een uitgangspunt is voor nieuw onderzoek, vooral ook voor niet-rationale bewegingen b.v. bij de stangenvierhoek. Een successnummer hierbij is de meetkundige afleiding van de eigenschappen der koppelkromme, een curiosum de geheel verschillende bewegingen, die afgebeeld worden door beeldkrommen, die elkaars spiegelbeelden ten opzichte van een vast punt zijn.

De algemene beschouwingen hebben tot zover een algebraïsch karakter. Bij de cyclische bewegingen, p. 181, en verderop is dat niet meer het geval. Een enkel woord nog over de beide laatste hoofdstukken, die betrekking hebben op de beweging, afhangende van twee parameters; een onderwerp, waarover de Schrijver reeds vroeger een waardevolle bijdrage heeft geleverd. Interessant is hierbij o.a. het onderzoek naar ontbindbare stelsels (hebben twee vlakken een beweging, afhangende van twee parameters, t.o.v. elkaar, dan *kan* er een derde vlak zijn, dat t.o.v. beide een éénparameterige beweging heeft). Zijn gewoonte getrouw geeft de Schrijver aardige voorbeelden.

Op een eigenaardigheid mag nog gewezen worden. Wanneer de Schrijver hier over de beweging van een stelsel spreekt, bedoelt hij — zonder de lezer te waarschuwen — het geheel van de standen, die bij de gegeven voorwaarden — maar onafhankelijk van de beginstand —, mogelijk zijn (b.v. beschrijft een punt een hyperbool, dan worden beide takken dezer kromme als zijn baan beschouwd).

In een boek met zoveel voorbeelden, met zoveel bijzonderheden uitgewerkt, zijn een paar vergissingen bijna onvermijdelijk.

De uitdrukking „rollende raaklijn" voor de raaklijn in de pool aan de poolkrommen is ongewoon en lijkt mij ongewenst.

p. 22. „Zijn op elk van twee snijdende rechten twee projectieve puntreeksen gegeven, terwijl het snijpunt O van de beide reeksen dekpunt is voor beide" . . . Voorbereiding voor de stelling van Bobillier; evenwel is de gestelde voorwaarde voor het vervolg te zwak, er moet staan: terwijl op elk der beide rechten in het snijpunt O de *beide* dekpunten samenvallen.

p. 50. „Voor elk punt wordt de asymptoot gevonden door de loodlijn te trekken uit het vaste spiegelbeeld op de as der vaste parabool". Inderdaad staat de asymptoot loodrecht op die as, maar zij gaat niet door dat spiegelpunt.

p. 133. In de constructie op deze bladzijde is door een tekenfout een vergissing.

Er is, — en dit is interessanter — een fout, die de referent vaker heeft aangetroffen en waarbij het gevaar, aan een zo meetkundige behandeling van de

differentiaaleigenschappen verbonden, duidelijk aan het licht treedt. Bedoeld wordt een opmerking over de omhullende van de buigcirkel; als een deel daarvan wordt de kromme van Ball genoemd. Daar de buigcirkel aan geen der beide vlakken vast is verbonden, moest hierbij aangegeven zijn in welk vlak de omhullende werd gezocht. Uit het vervolg blijkt echter duidelijk dat de Schrijver bedoelt: „in het vaste vlak raakt de buigcirkel aan zijn omhullende in het punt van Ball en de meetkundige plaats van dit punt is in dit vlak een deel van de omhullende van de buigcirkel." Dit nu is onjuist; de bewering zou juist zijn na vervanging van het vaste door het beweeglijke vlak.

Maar ons eindoordeel blijkt wel uit het voorafgaande.

W. VAN DER WOUDE.

Vlakke Meetkunde voor het V.H. en M.O. door M. Eilander, Dir. 2e Chr. H.B.S. A'dam. Deel I, Theorie *f* 3,50. Deel IIA. Vraagstukken *f* 1,75. Deel IIB. Vraagstukken, *f* 2.90. P. Noordhoff, Groningen.

Een vraagstukkenverzameling alleen is voor schoolgebruik minder geschikt; zonder de theorie kan de leerling het niet stellen en het dicteren hiervan is te tijdrovend.

Eilander heeft, op verzoek, nu een passend theorieboek geschreven bij de bekende „Meetkundige Vraagstukken" van Wijdenes, welke verzameling tevens „zorgvuldig herzien" is.

Druk, indeling, figuren en verwijzingen zijn uitstekend. De theorie is volledig in deel I ondergebracht; inderdaad heeft dit het voordeel dat de leerling steeds de mogelijkheid heeft vroeger bestudeerde stellingen enz. na te kunnen slaan. De leraar zal van deze mogelijkheid ook een dankbaar gebruik maken; het bijgevoegde korte overzicht kan daarbij van groot nut zijn. Het vermelden als een afzonderlijk hoofdstuk van enige belangrijke stellingen, het besteden van bijzondere aandacht aan het maken der figuren, het bij de vraagstukken plaatsen van mededelingen als „Tekenwerk", „Rekenwerk" enz. verraadt de practicus, die het klappen van de zweep kent.

'k Twijfel dan ook niet of deze Vlakke Meetkunde van Eilander zal zijn weg zeker vinden. Pas het gebruik leert je een schoolboek kennen, het veranderen van leerboek brengt dan ook steeds enig risico met zich; 'k geloof evenwel, dat het gevaar van zich vergist te hebben in dit geval zeer klein is. Uit waardering voor de zorgvuldige behandeling van het begrip M.P. zij een enkele opmerking ter overweging aanbevolen.

Voornamelijk uit didactische overwegingen lijkt 't mij niet gewenst bij het definiëren van het begrip M.P. gebruik te maken van de uitdrukking „verzameling". Dit begrip wordt niet gedefiniëerd en werkt dus maar verwarrend; een verzameling kan leeg zijn, uit één enkel punt bestaan enz. Hoewel in wezen tegen de gebezigde definitie niets valt in te brengen, geef ik voorkeur aan: „Een M.P. is een figuur . . .; met vermijding van het woord verzameling. Nog een paar kleinigheden. In 't theorieboek § 41 zou ik liever alle combinatie-mogelijkheden noemen, maar tevens aan de „klas" het advies geven: pas steeds *a*, *b* toe. St. 33*b*, *c* geldt alleen als de hoek niet 180° is. St. 61 (§ 53) kan eigenlijk niet zo kort worden geformuleerd.

Ten slotte: hartelijk aanbevolen!

Delft.

G. A. JANSSEN.

Bijdrage tot de Grondslagenleer der Gewone Complexe Projectieve Meetkunde en tot de zuiver Synthetische Studie der Complexe Grondfiguren van de eerste Soort, 152 blz.; 27 fig. (1949), door Dr J. Bilo, Uitgegeven door de Koninklijke Vlaamse Academie voor Wetenschappen, Letteren en Schone Kunsten van België, Hertogelijke Str. 1, Brussel. Prijs: 245 fr. + port.

In dit werk wordt een volledig axiomastelsel van de gewone complexe meektunde gegeven. Tevens wordt aangetoond, hoe uit die axioma's langs zuiver meetkundige weg de voornaamste resultaten van de complexe projectieve meetkunde kunnen afgeleid worden. Het bewijs van de niet-strijdigheid, de volledigheid en de onafhankelijkheid van de axioma's wordt zeer uitvoerig gegeven.

Het werk is typografisch uitstekend verzorgd.

Onderzoekingen betreffende de meetkundige Grondslagen van de Projectieve Quaternionenmeetkunde, 123 blz. (1949). door Dr J. Bilo. Te verkrijgen bij de Boekhandel A. Vanderlinden, Studentenstraat 38, Brussel. Prijs: 75 fr. + port.

In dit werk wordt voor de eerste maal een zuiver meetkundige studie van de projectieve quaternionenmeetkunde gemaakt. De axioma's van die meetkunde worden opgesteld en hieruit wordt de theorie verder ontwikkeld tot en met de classificatie der involutorische projectiviteiten en antiprojectiviteiten.

Deze meetkunde is zeer merkwaardig, omdat een projectiviteit niet op ondubbelzinnige wijze door drie paren homologe elementen bepaald wordt. Zo worden b.v. op grondige wijze de projectiviteiten met oneindig veel coïncidentie-elementen onderzocht, die niet de identiteit zijn. Van het standpunt der analytische meetkunde is die meetkunde merkwaardig, omdat het product van twee coördinaten over het algemeen niet commutatief is. Ook de classificatie der projectiviteiten en der antiprojectiviteiten verschilt grondig van die, welke in de gewone projectieve meetkunde gegeven wordt.

(Beide werken bevinden zich in de Boekerij van het Wiskundig Genootschap p/a Universiteitsbibliotheek Amsterdam).

G. E. Kiers, Vademecum der Wiskunde voor de hoogste drie klassen der H.B.S. — G. B. van Goor zonen's U.M. N.V. — Den Haag 1949. Prijs *f* 1,50, 64 blz.

Dit boekje „is bedoeld als repetitiemateriaal voor de hoogste drie klassen van het V.H.M.O." Het bevat de formules en stellingen uit de Algebra (Diff.- en Integr. rek. inbegrepen), de Gonio- en Trigonometrie, de Vlakke Meetkunde, de Stereometrie en de Beschrijvende Meetkunde (in de oude notatie). Het is wel zeer volledig: secans, negenpuntscirkel ontbreken niet. Vele duidelijke figuren verlevendigen de tekst.

Jammer is het, dat geen enkele grafiek opgenomen is. De formules op blz. 17 zijn nu wel erg dor. Verder mis ik een korte behandeling $y = a^x$ en $y = {}^a\log x$, terwijl de functie $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{px^2 + qx + r}$ wèl opgenomen is. Schr. heeft blijkbaar

geen rekening gehouden met het „Rapport inzake de herziening van het eindexamenprogram van de H.B.S.-B" (Euclides, 24e jg. 1948, blz. 10), zoals dit in de voorlaatste vergadering van Wimecos is aanvaard; de inhoud is wel erg „klassiek".

Wie een vademecum op school wenst in te voeren verzuime niet van dit overigens aantrekkelijke boekje kennis te nemen.

H. STR.

J. K. Timmer, Lagere Wiskunde 2, Planimetrie (Studieboek voor de acte Wiskunde L.O.). W. J. Thieme & Cie, Zutphen, 1948. 345 blz. Prijs ingen. ƒ 11,25, geb. ƒ 12,75.

Het is schr. er alles aan gelegen, dat de gebruikers wiskundige vorming zullen opdoen. Daarvoor wordt van de zijde der examencommissie ook steeds propaganda gemaakt. Deze commissie onderzoekt deze vorming door na te gaan, of de cand. in staat is een onbekend vraagstuk goed aan te pakken en of hij de stellingen, die daarbij toepassing vinden, goed kent en begrijpt. De grondslagen der vlakke meetkunde komen daarbij niet aan de orde. In overeenstemming daarmee heeft schr. dit soort vorming in het boek voorop gezet, ja, alles er op toegelegd om des candidaten vermogen tot het oplossen van vraagstukken te vergroten. Hij noemt zelf hoofdstuk 6 de „geestelijke kern" van het boek; de titel van dit 11 blz. tellende hoofdstuk luidt: „Vergroting van het wiskundig vermogen". Men moet toegeven: als de pogingen van schr. nog niet helpen om iemand sommen te leren maken, dan helpt ook werkelijk niets meer. Het gehele boek is daardoor ook in een bepaalde „toon" geschreven. Het is niet de wiskunde, die hier aan 't woord is, maar de heer T., die overal de cand. met raad en daad bijstaat. Niet iedere lezer zal deze toon kunnen apprecieren. Schr. weet echter, voor wie hij schrijft. De studenten voor de acte wisk. L.O. zijn heel vaak onderwijzers, die deze acte alleen willen bezitten, om er financiëel voordeel mee te behalen of grotere promotiekansen door te krijgen. Voor deze candidaten is dit boek een geduldige, gezellige en veilige gids, die voortdurend tracht, des cand. blik te scherpen. De bedoeling van schr. om de cand. tot zelf denken te dwingen brengt hem er ook toe, de meeste bewijzen in aanduidende vorm te geven, zodat de cand. zelf de volledige bewijsvoering moet produceren. Het schijnt mij toe, dat schr. daarbij nog al eens te ver gaat, en vergeet, dat juist die cand., waarvoor hij schrijft, daar niet altijd toe in staat zijn. Bovendien laat schr. zich hierdoor de gelegenheid ontglippen, om voorbeelden te geven van het opschrijven van een scherp betoog. (Een opm.: op blz. 45 wordt de lezer daartoe naar § 14 verwezen. Deze § kan hem niet voldoende helpen).

Het boek is in vier gedeelten gesplitst: Algemeen gedeelte, Theoretisch gedeelte, Methodisch gedeelte, Practisch gedeelte (examenopgaven en uitwerkingen van opgaven).

Het draagt daardoor een min of meer concentrisch karakter; verschillende onderwerpen worden in het eerste deel aangeduid en voorbereid, in het tweede deel behandeld, in het derde deel te pas gebracht.

De kern van het eigenlijke theoretische deel is de theorie der transformaties; de schr. brengt zoveel mogelijk alles onder dit gezichtspunt. Hierbij maakt hij vele aardige en verrassende opmerkingen, die de lezer ongetwijfeld niet onberoerd zullen laten. Verheugend is de opname van een hoofdstukje over de theorie der zwaartepunten met aardige toepassingen. Te betreuren is het weglaten van de pooltheorie (die wel voorkwam in deel IV van het Leerboek der Vlakke meetkunde

van Derksen & de Laive; het boek van den heer T. is nl. als 5e druk van dit leerboek uitgegeven; het is overigens vrijwel een nieuw boek geworden).

Het is onvermijdelijk, dat de lezing van zo'n persoonlijk getint boek vele reacties bij den recensent oproept. Enkele daarvan mogen hier volgen.

In hfdst. 2 somt de schr. vele eisen op, waaraan een definitie moet voldoen. Hij vergast ons daarbij zelf op het volgende viertal: „Een vlakstuk is een deel van een plat vlak, dat binnen een gesloten lijn ligt". „De lengte van een lijnstuk is elk willekeurig lijnstuk, dat daarmee congruent is". „De oppervlakte van een figuur is het deel van het platte vlak, dat door die figuur omsloten wordt." „Onder het product van 2 lijnstukken verstaan we de oppervlakte van de rechthoek, die deze lijnstukken tot aangrenzende zijden heeft". De combinatie van dit viertal is op z'n minst merkwaardig te noemen.

In hfdst. 3 („Het denken") wordt de axiomatiek als volgt afgedaan: Voor ons doel hebben wij voldoende aan: 1. de existentie-axioma's van de grondbegrippen punt, rechte en plat vlak, die meestal met de definitie hiervan verbonden worden, 2. het axioma, dat elke eigenlijke rechte één oneigenlijk punt heeft.

Zelfs dit weinige had nog gevoegelijk achterwege kunnen blijven, er wordt niet meer op teruggekomen. Van „vorming" is in dit verband geen sprake.

In § 38 wordt uitvoerig de bedoeling van de discussie besproken. Het is jammer, dat schr. zelf in zijn boek veel discussies achterwege laat (§ 98 A) en moeilijke discussies aan den lezer overlaat (bl. 239). In § 83 wordt de wenteling (rotatie) te beknopt besproken; zo is b.v. niet bewezen, dat een rechte, na wenteling (punt voor punt) om een punt buiten die rechte, weer een rechte oplevert; de toepassing op blz. 187 is met § 83 niet voldoende verantwoord. Op blz. 124 verbaast schr. zich over de benamingen: uit- en inwendig gelijkvormigheidspunt, en stelt hij nieuwe namen voor. Ik moge hem uit den droom helpen: het uit- (in-)wendig gelijkv. p. verdeelt het verbindingslijnstuk der middelpunten uit- (in-)wendig in stukken, die zich verhouden als de stralen. Schr. voert trouwens meerdere nieuwe namen en tekens in. Zo op blz. 136: torsie (= rotatie gevolgd door vermenigvuldiging met hetzelfde centrum, Duits: Drehstreckung); daarbij gebruikt hij niet het werkwoord torderen (zoals in de Natuurkunde, naar het Fr. tordre), maar het werkw. torqueren (blijkbaar naar het Lat.). Zo op blz. 196: $ac - b_1b_2 = \backsim$; dit betekent $ac - b_1b_2 = bc - a_1a_2$; op blz. 201 merkt hij echter bij het onschuldige teken $\stackrel{?}{=}$ op, dat dit geen erkend teken is. Zo op blz. 220: een favorite lijn; niet zo maar eens, in de loop van het gesprek, maar zelfs in de inhoud opgenomen.

Op blz. 133 wordt meegedeeld, dat de snijpunten der 3 Apollonische cirkels van een driehoek de isodynamische centra genoemd worden. Verder komen ze niet meer voor. In de oude D. v. d. L. IV kwamen ze later terug als de punten, van waaruit men de 3 hoekpunten van een driehoek in de 3 hoekp. van een gelijkzijdige driehoek inverteren kan.

Op blz. 178 geeft de schr. de formule $c_{2n} = \sqrt{2 + c_n}$ en deelt mede: dit is een van de sporadisch voorkomende niet-homogene meetkunde formules. Echter is c_n een afkorting voor $\sqrt{4 - \frac{a_n^2}{R^2}}$, dus een getal (zoals schr. zelf opmerkt); beide leden zijn dus homogeen van de nulde graad.

Ik ben zeer benieuwd naar de andere, sporadisch voorkomende, niet-homogene formules.

Op blz. 192 is een raaklijn de limietstand van een snijlijn; in het bewijs betreffende de loodrechte stand „verandert de naam snijlijn krachtens definitie in raaklijn".

De raad op blz. 180, om voor de berekening van het oppervlak van een driehoek met zijden $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$ en $\sqrt{7}$ eerst de s-formule algebraisch te gaan omwerken, door $s = a + b + c$ te substitueren, is verstandiger in de wind te slaan: de cand. berekene liever de proj. van één der zijden op een andere, om dan de St. van Pythagoras te hulp te roepen.

De constructie op blz. 233 is beslist een achteruitgang bij die in D. & de L. (III).

Is het boek aan te bevelen? Voor bovenomschreven candidaten zeer zeker; er is een grote hoeveelheid opleiderservaring in verwerkt; schr. kent zowel het examen als z'n Pappenheimers door en door. Voor cand. met uitgesproken wiskundige aanleg zou een boek met minder letters en meer inhoud aanbevelenswaardig zijn; voor hen ware de oude D. &. d. L. IV, ondanks de tekortkomingen, nog beter geschikt.

H. STR.

N. D. Haasbroek, Lector aan de Technische Hogeschool te Delft, *Nomografie.* XII + 288 blz., 111 figuren, 18 × 26 cm. Prijs geb. *f* 15.—. N.V. Wed. J. Ahrend & Zoon, Amsterdam, 1949.

De toepassing van de wiskunde op een concreet geval draait altijd uit op het numerisch berekenen van zekere onbekende grootheden, die door bekende betrekkingen met gegeven grootheden verbonden zijn. Omdat dan alleen het resultaat van belang is, dient men deze numerische bepaling terug te brengen tot een bewerking die zo eenvoudig en zo snel mogelijk kan worden uitgevoerd en tegelijkertijd zo min mogelijk aanleiding geeft tot het maken van fouten. In dit opzicht is het gebruik van nomogrammen zeer doeltreffend gebleken; vandaar dan ook dat dit gebruik zich steeds meer uitbreidt voor al die bepalingen van de onbekenden waarbij men met een beperkte nauwkeurigheid kan volstaan, wat zeer vaak het geval is.

Een nomogram bestaat uit een samenstel van rechte of kromme lijnen. Bij de eerste soort, de „lijnennomogrammen", is aan elke veranderlijke een stelsel lijnen toegevoegd; bij elk dezer lijnen is de bijbehorende waarde van de veranderlijke geschreven. (Om praktische redenen geschiedt dit in werkelijkheid slechts bij de lijnen die behoren bij ronde waarden van de veranderlijke.) Elk drietal concurrente lijnen (van elk der stelsels één) bepaalt een groep bij elkaar behorende waarden van de veranderlijken x, y en z. Is dus voor y en z elk een waarde gegeven, dan zoekt men het snijpunt op van de bijbehorende y- en z-lijnen; de gezochte waarde van x staat bij de x-lijn die door hetzelfde snijpunt gaat. In de regel zal men natuurlijk tussen de lijnen op het oog moeten interpoleren. Zijn er vier veranderlijken (x, y, z en t), dan zal het nomogram meestal zo zijn geconstrueerd, dat men door het snijpunt van de y- en z-lijnen een lijn voor een hulpveranderlijke h vindt en daarna door het snijpunt van de h-en t-lijnen een lijn voor de afhankelijk veranderlijke x.

Bij de tweede soort, de „puntennomogrammen", waarbij men vaak van lijncoördinaten uitgaat, behoort bij elke veranderlijke een reeks punten gelegen op een rechte of kromme lijn. Bij elk punt is de bijbehorende waarde van de veranderlijke geschreven. (In werkelijkheid zijn weer alleen de punten behorende bij ronde waarden van de veranderlijke becijferd.) Elk drietal collineaire punten (van elk der reeksen één) bepaalt een groep bij elkaar behorende waarden van drie veranderlijken. Om het collineair zijn van de punten te beoordelen gebruikt men een nomogramliniaal, dat is een dunne rechte lijn getrokken op doorzichtig materiaal (b.v. celluloid).

Alvorens het boek van de heer Haasbroek te bespreken, heb ik gemeend deze begripsomschrijving te moeten geven teneinde ook de lezers die niet bekend zijn met dit onderdeel van de toegepaste wiskunde, een indruk te geven van de belangrijkheid er van, en van de aantrekkelijkheid die de theorie van de nomografie ongetwijfeld heeft ook voor uitsluitend theoretisch aangelegde wiskundigen.

Voor het ontwerpen van nomogrammen is een zekere vaardigheid gewenst in het werken met determinanten en met vergelijkingen van kegelsneden. Om eenvoudige constructies te bereiken en ongunstige (scheve) snijdingen te vermijden, past men kunstgrepen toe. Zo zal men door transformatie moeilijk te construeren krommen vervangen door rechten (anamorphose), maar omgekeerd, om gunstige snijdingen te bereiken, b.v. een rechte vervangen door een ellips.

Het is een verdienste van de heer Haasbroek, dat hij op de eerste 51 blz. van zijn boek op zeer duidelijke wijze datgene uit de leer der determinanten en der analytische meetkunde heeft gereleveerd, waarvan de kennis voor de bestudering van de volgende bladzijden onmisbaar is. Het zou veel tijd kosten in de bestaande boeken over analytische meetkunde alles betreffende het determineren van kegelsnedevergelijkingen volledig bij elkaar te zoeken. Gelukkig heeft de heer Haasbroek dit voor de lezer gedaan, en wel met een zeer overzichtelijk resultaat.

Van groot belang is ook, dat de schrijver zich op het standpunt stelt, dat voor het construeren van een nomogram geen moeite te veel mag zijn. Ik bedoel dit: andere schrijvers over nomografie, die zich blijkbaar met de praktijk weinig of niet hebben ingelaten, vergenoegen zich dikwijls met min of meer onnauwkeurige (soms zelfs wel slordige) meetkundige constructies. Men bedenke echter, dat een eenmaal geconstrueerd nomogram gedurende lange tijd zeer vele malen zal worden gebruikt en ook dat het wenselijk is, met het oog op een ruime gebruiksmogelijkheid, de grootste bereikbare nauwkeurigheid na te streven. Alle tijd en moeite gespendeerd aan de constructie is dus welbesteed. De schrijver berekent daarom van kromme lijnen zeer veel (en dus dicht op elkaar gelegen) punten in rechthoekige coördinaten (met een rekenmachine) en laat deze op mechanische wijze (met een coördinatograaf) uitzetten.

Grote nauwgezetheid wordt door alles in dit boek gesuggereerd: juiste uitdrukkingswijze, nagenoeg geen drukfouten, nauwkeurige typografische verzorging van de wiskundige uitdrukkingen met het DIN-systeem, schitterend getekende figuren en nomogrammen (nergens zal men in kromme lijnen met het blote oog enige onregelmatigheid in de kromming ontdekken, terwijl de figuren door het clicheren toch altijd enigszins geleden moeten hebben). Aan alles ziet men, dat in dit boek een prima vakman aan het woord is.

Men zou kunnen denken, dat men, als men van een bepaalde formule een nomogram wenst, zich tot een nomogramdeskundige zou kunnen wenden, b.v. tot de heer Haasbroek. Dit is echter niet zo; het zal de lezer van dit boek duidelijk worden, dat de ontwerper van een nomogram het vak waaraan de te behandelen formule is ontleend, grondig moet kennen. Men moet dus zelf zijn eigen nomogrammen kunnen ontwerpen. Welnu, dit leert U de heer Haasbroek in dit boek op een betere manier dan tot dusverre in de nomografische literatuur is geschied.

Moge de schrijver met dit boek een alleszins verdiend succes behalen!

Rotterdam, Januari 1950. F. HARKINK.

P. Wijdenes. *Middel-Algebra. Deel II.* Vierde druk (1949).

De titel van dit boek is té bescheiden. De inhoud toch bestrijkt een belangrijk deel van wat men tegenwoordig „klassieke algebra" noemt. Behandeld worden o.a. de volgende onderwerpen: de invoering der onmeetbare getallen, limieten van varianten en functies, reeksen — zowel met reële als met complexe termen, gelijkmatige convergentie, exponentiële en logarithmische functies, kettingbreuken.

Dit boek is een voortreffelijke inleiding tot de analyse voor beginners, ook voor diegenen, die op zelfstudie zijn aangewezen. Het is vlot en duidelijk geschreven, het bevat een groot aantal uitgewerkte vraagstukken en verdere opgaven, terwijl de omvang beneden redelijke grenzen blijft (377 pp.). De schrijver roept hier en daar op gelukkige en geheel verantwoorde wijze de meetkundige aanschouwing te hulp, wat voor de beginner een sterke steun kan zijn. Belangwekkend zijn ook de „historische aantekeningen" van de hand van Dr E. J. Dijksterhuis aan het eind van het boek.

Er is misschien één bezwaar tegen het gebruik van dit boek aan de Universiteit. Daar toch stelt men er veelal prijs op om bij de opbouw van de analyse zo spoedig mogelijk het verzameling begrip in te voeren en de nadruk te leggen op enkele algemene en fundamentele principes. Dit nu mist men voor een deel in het hier besproken werk. Tot uiting komt dit reeds bij de behandeling van de z.g. grondstelling van de algebra, welke hier noodzakelijk moeizaam moet geschieden. Toch is dit boek zeer wel bruikbaar als aanvulling van een college voor eerste jaarsstudenten, te meer omdat men soms huiverig is om jongens, zo van Gymnasium of H.B.S., één der standaardwerken over analyse in handen te geven.

Al met al een voortreffelijk werk, dat ik gaarne in de belangstelling van brede kringen aanbeveel.

POPKEN.

P. Wijdenes, *Beginselen van de Getallenleer,* 2e druk 1949; ing. ƒ 8,25, geb. ƒ 10,50.

In jaargang 16 van „Christiaan Huygens" (1937-38) heeft ondergetekende op pag. 110—112 een uitvoerige bespreking aan de eerste druk van Wijdenes' Beginselen van Getallenleer gewijd. Het vele loffelijke, dat toen is opmerkt geldt onverzwakt voor deze tweede druk. Bovendien echter moet thans worden vermeld, dat de (weinige) concrete punten, die den recensent aanleiding hadden gegeven tot (ondergeschikte en subjectieve) bezwaren (het bekend veronderstellen van de hoofdstelling der rekenkunde; de plaats van de stelling van Wilson in het boek; een al te grote breedheid op een enkele plaats; een drukfoutje) door den auteur onder de loupe zijn genomen, zodat thans niets te wensen overblijft. Conclusie: een helder werk, dat een betrouwbare gids betekent voor den studerende, zij het, dat deze werkt voor K I, dan wel met het oog op een universitair tentamen of uit zuivere belangstelling voor het onderwerp, zich wenst te verdiepen in de elementaire getallenleer.

Als de recensent de wens uitspreekt, dat dit uitstekende boek in vele handen moge komen, heeft hij mede het belang van het Wiskundig Genootschap op het oog: op de September-vergadering van het W. G. in 1949 toch, kon de voorzitter mededelen, dat de auteursrechten van het hier besproken werk door den Heer Wijdenes bij wijze van schenking aan het W. G. zijn overgedragen!

J. F. KOKSMA.

KORREL

XCVI

e EN π IN VEEL DECIMALEN.

Voor enige weken ontving ik van Prof. Dr. R. C. Archibald (Brown University, Providence R. I.) een brief, waarvan een gedeelte als volgt luidt.

By the way I am not sure that I sent to you earlier the enclosed reprint of the numerical value of π to 808 places of decimals. In my periodical I had earlier published the value of e to 808 decimals, as computed by a Danish secondary schoolmaster Peder Petersen.

One of our great computing machines over here, called ENIAC (Electronic Numerical Integrator And Computor) has recently computed e to 2016 places of decimals in 36 hours and π to 2040 places in 96 hours".

Voor liefhebbers hierbij π in 808 decimalen.

P. W.

$\pi=3.$	14159	26535	89793	23846	26433	83279	50288	41971	69399	37510
	58209	74944	59230	78164	06286	20899	86280	34825	34211	70679
	82148	08651	32823	06647	09384	46095	50582	23172	53594	08128
	48111	74502	84102	70193	85211	05559	64462	29489	54930	38196
	44288	10975	66593	34461	28475	64823	37867	83165	27120	19091
	45648	56692	34603	48610	45432	66482	13393	60726	02491	41273
	72458	70066	06315	58817	48815	20920	96282	92540	91715	36436
	78925	90360	01133	05305	48820	46652	13841	46951	94151	16094
	33057	27036	57595	91953	09218	61173	81932	61179	31051	18548
	07446	23799	62749	56735	18857	52724	89122	79381	83011	94912
	98336	73362	44065	66430	86021	39494	63952	24737	19070	21798
	60943	70277	05392	17176	29317	67523	84674	81846	76694	05132
	00056	81271	45263	56082	77857	71342	75778	96091	73637	17872
	14684	40901	22495	34301	46549	58537	10507	92279	68925	89235
	42019	95611	21290	21960	86403	44181	59716	02977	47713	09960
	51870	72113	49999	99837	29780	49951	05973	17328	16096	31867
	50244	594(55)								

INGEKOMEN BOEKEN.

Van P. Noordhoff—Groningen:

Prof. Dr F. Loonstra, *Wiskunde en mechanica*; rede uitgesproken bij de aanvaarding van het ambt van hoogleraar aan de T. H. te Delft.

Prof. Dr A. Heyting, *Spanningen in de Wiskunde*; rede uitgesproken bij de aanvaarding van het ambt van hoogleraar aan de Universiteit van Amsterdam.

Prof. Dr J. C. H. Gerritsen, *De betekenis van de wiskunde voor de hedendaagse natuurwetenschap.*

Prof. Dr D. van Dantzig, *Blaise Pascal en de betekenis der wiskundige denkwijze voor de studie van de menselijke samenleving.*

Antwoorden en uitwerkingen op de volgende boeken:

Molenbroek, *Leerboek der Vlakke Meetkunde.*

,, *Leerboek der Stereometrie.*

Wijdenes, *Middel Algebra* I, II.

,, *Lagere Algebra* I, II.

,, *Leerboek der Gonio- en Trigonometrie.*

Grafiekenschrift, **12e druk**, *f* 0.65.

P. Wijdenes, *Algebra voor M.U.L.O* II B, examenuitgave **18e druk** 235 blz., 43 fig. *f* 3.25.

P. Wijdenes, Oefenbladen I *f* 1,25. II *f* 1,60. **5e druk** Handleiding daarbij. 64 blz. 127 fig. *f* 1.25.

Alle in de bewerking van Dr H. Streefkerk.

Dr Joh. H. Wansink, Drs A. Holwerda en Dr D. H. van der Neut, *Beschrijvende Meetkunde*, 103 blz. 99 fig. *f* 2,40, geb. *f* 2,75.

Ir. J. T. Groenman, (Deventer, R. H. B. S.) Behandeling van de Koppelkromme met behulp van isotrope coördinaten.

Proefschrift ter verkrijging van de graad van doctor in de Technische Wetenschap aan de T. H. te Delft; promotor Prof Dr O. Bottema.

SIXIÈME CONGRÈS INTERNATIONAL D'HISTOIRE DES SCIENCES.

Amsterdam, 14-20 Août 1950

Sous les auspices de l'Académie et de l'Union Internationale d'Histoire des Sciences

Organisé par le „Genootschap voor Gechiedenis der Wiskunde, Geneeskunde en Natuurwetenschappen", à Leyde.

Comité d'organisation Prof. Ir R. J. Forbes, Prof. Dr R. Hooykaas, Mademoiselle A. C. Schippers.

Notice préliminaire

L'Union Internationale d'Histoire des Sciences et l'Académie Internationale d'Histoire des Sciences ont invité de commun accord la section Néerlandaise de l'Union, le „Genootschap voor Geschiedenis en Wiskunde, Geneeskunde en Natuurwetenschappen", d'organiser le 6e Congrès International d'Histoire des Sciences aux Pays Bas.

Le Congrès aura lieu du 14 au 20 Août 1950 dans les localités de l'Université d'Amsterdam. En dehors des réunions générales et celles des Comités, les membres du Congrès s'assembleront en quatre sections:

a) Histoire de la mathématique, physique et astronomie,
b) Histoire de la chimie, pharmacie et biologie,
c) Histoire des sciences appliquées et technologie,
d) Histoire de la médicine.

Les réunions de la section *d*) constitueront en même temps le XVIe Congrès de l'Union Internationale de la Médecine, qui rédigera le programme de cette section.

Des séances plénaires et des séances de sections auront lieu pendant la semaine du Congrès, et une séance plénaire sera consacrée à la mémoire de Descartes.

Des excursions seront faites à *Haarlem* (Séance à l'Institut Teyler et visité à la station pompière Cruquius), à *Leyde* (visite au Musée de l'Histoire des Sciences et séance) et à la grande *Digue* et aux pays nouvellement réclamés de l'ancienne Zuyderzee.

Programme des Dames. Un Comité de Dames d'Amsterdam s'occupera des dames étrangères pendant leur séjour dans notre ville.

Un programme spécial est composé, qui contient entre autres une visite au marché de fleurs à Aalsmeer, spectacle unique; ensuite une visite au fameux marché de fromages à Alkmaar; des visites aux Musées d'Amsterdam et à la taillerie de diamants, etc.

Communications.

M.M.les membres qui voudraient présenter une communication au Congrès, sont *urgemment* priés d'envoyer leurs papiers au Secrétaire, avant le 1 mai 1950. *Après cette date aucune communication sera acceptée.* Ces communications doivent être accompagnées par un résumé du texte de 100—150 mots au plus, et seront imprimées dans le programme définitif.

Les communications en entier seront publiées dans les rapports du Congrès, et éditées par les bons soins de l'UNESCO.

Au Congrès de Lausanne en 1947 deux résolutions étaient adoptées, lesquelles priaient les auteurs de communications pour le 6e Congrès, de discuter les thèmes suivants:
a) Influences et précurseurs,
b) Relations et rapprochement entre l'Est et l'Ouest.

Ceux qui désirait lire des communications sont priés de considérer ces deux résolutions.

M.M.les membres auront 15 minutes au maximum pour le résumé de leur communication; un autre maximum de 15 minutes est cédé aux discussions.

Cotisation du Congrès.

La cotisation du Congrès à 25 *florins*, courant Néerlandais (ou équivalent en d'autres valeurs) pour chaque membre, et 15 *florins* courant Néerlandais (ou équivalent en d'autres valeurs) pour les membres de leurs familles, couvrent les dépenses des transactions du Congrès, et rafraîchissements légers pendant la semaine du Congrès.

Cette cotisation peut être réglée par transfert, par l'intermédiaire de votre Banque à l'*Amsterdamsche Bank N.V., Succursale, Leidsestraat, Amsterdam,* pour le compte de M. le Professeur Ir R. J. Forbes, dans sa qualité de trésorier du VIe Congrès d'Histoire de Sciences.

Renseignements généraux.

Logement à Amsterdam. Dans le prochain circulaire (No. 2) vous trouverez un bulletin de logement pour l'hôtel et l'hospitalité privée.

Les prix d'hôtels à Amsterdam varient de 12 florins à 17.50

florins par jour, par personne, chambre, petit déjeuner et un repas compris.

Les dépenses générales d'une journée ne dépassent donc point les 25 florins.

Hospitalité dans les familles d'Amsterdam. Cette hospitalité est offerte gratuitement, chambre et petit déjeuner compris. Pourtant la priorité sera donnée aux personnes ayant des difficultés pour obtenir des devises étrangères et parmi elles, à celles qui devront faire un long voyage.

Le premier circulaire est envoyé à tout ceux voulant s'orienter sur le VIe Congrès. En retournant *au plus tôt* la carte postale ci-jointe, vous recevrez les circulaires suivants, contenant détails sur régistration, payements, logement, réceptions, excursions, programme etc.

Point de circulaires seront envoyés à ceux qui ne retournent pas leur première carte postale. [1])

Toute lettre de régistration, d'informations, de suggestions etc. doit être envoyée au Professeur Ir R. J. Forbes, Haringvlietstraat 1, Amsterdam-Z., Pays Bas.

Men meldt zich voor deelneming aan bij Prof. Ir Forbes.

[1]) Uiteraard heeft „Euclides" geen kaart voor aanmelding ingesloten. W.

DE EERSTE ALGEBRALESSEN.

Het komt mij voor dat in *Euclides*, tijdschrift voor de *didactiek* der exacte vakken wel eens wat weinig aandacht wordt besteed aan practische didactische kwesties. Toch is uitwisseling van ervaringen telkens weer stimulerend. We zijn toch al zo op ons zelf aangewezen, als we voor de klas staan. Hoewel de hogere leerjaren ons ook wel voor didactische problemen zetten, is dat daar toch niet zo sterk het geval als in het eerste leerjaar, waar we de eerste stappen met onze leerlingen moeten doen in de wetenschap „wiskunde". Wie de peuters voor zich ziet zitten, die nog liever met de pop of het spoortreintje spelen, dan zich te vermoeien met een logische redenering, waarvoor ze nog niet rijp zijn, kan zich verbazen over de hardnekkigheid, waarmee herdruk op herdruk volgt van leerboeken, die volkomen gesteld zijn in de stijl en de woordenkeus der volwassenen:

„1. *Letters*. In de rekenkunde stelt men de getallen meestal door cijfers voor; in de algebra meestal door letters. Die letters kunnen willekeurige waarden voorstellen, maar een zelfde letter behoudt in een zelfde vorm de eenmaal aangenomen waarde."

Zo begint een bekend leerboek der algebra de *vier en twintigste* druk van deel I. Dat dit maar steeds domweg weer herdrukt werd kan dunkt me alleen hieruit voortkomen, dat de meeste collega's hun algebra-boek alleen gebruiken als vraagstukkenboek en zich om de er in afgedrukte theorie niet bekommeren. Bovendien moet dunkt me de belangstelling voor de didactiek in de kringen der wiskundeleraren nog ontwaken. Er zijn natuurlijk pioniers, waarbij ik o.a. denk aan de leden van de Wiskunde Werkgroep van de Werkgroep voor Onderwijs-vernieuwing, maar dit getal is toch zo klein, dat men wel tot de gedachte moet komen, dat men de wiskunde nog steeds doceert op de manier, waarop ook onze vaderen het deden, niet omdat men die manier zo uitstekend vindt, maar omdat men zich eenvoudig niet realiseert, dat het ook anders kan dan zoals we het zelf in onze H.B.S.-tijd leerden. Dit oordeel is natuurlijk sterk generaliserend en lang niet ieder hoeft het zich aan te trekken, maar het is toch wel kenmerkend, dat de bekende leerboeken zulk een eerbiedwaardige ouderdom hebben, terwijl de nieuwe drukken dikwijls alleen van die uit de tijd onzer grootvaders verschillen, doordat de spelling vernieuwd is en uitdrukkingen als „de hoeken

eens driehoeks" gemoderniseerd zijn. Daarnaast kunnen leerboeken met een principieel andere methodiek het dikwijls nauwelijks tot een herdruk brengen.

Het was echter niet mijn bedoeling het in dit artikel over de leerboeken te hebben, maar te vertellen, hoe ik mijn eerste algebralessen gaf. Misschien dat iemand het ook zo eens wil proberen of dat een ander er critiek op wil leveren, zodat er een discussie over didactiek uit kan ontstaan.

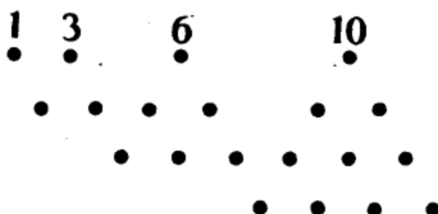
Met deze eerste algebra-lessen stel ik me de volgende doeleinden voor ogen:

1. Sluit aan bij het gewone rekenen van de lagere school.
2. Laat toch de algebra volkomen nieuw zijn.
3. Geef de leerlingen iets, waarmee ze direct zelf kunnen werken.
4. Laat de leerlingen van het begin af merken, dat wetenschappelijk denken een critische houding eist, die niets vanzelfsprekend vindt.

Betreffende punt 2 nog deze opmerkingen: Er zijn, tenminste hier in Groningen, opleidingsscholen, die het nodig vinden de kinderen van de zesde klas al een beetje algebra en meetkunde te leren. Ik heb dat nooit kunnen appreciëren. In de eerste plaats wordt het daardoor moeilijker een nieuw onderwerp, bijv. het machtsverheffen te beginnen met dat element van verrassing of verwondering, dat met het ontdekken van iets nieuws gepaard gaat en dat in de les zoveel aantrekkelijks kan brengen en bovendien de nieuwe leerstof gemakkelijker en hechter doet invoegen in de structuur van de bij de leerling reeds aanwezige kennis. Bovendien heb ik bij het laatste toelatingsexamen een aantal candidaten gehad, die meenden een eenvoudige rekenopgave op algebraische wijze te kunnen oplossen, maar daarbij duidelijk blijk gaven er niet veel van te hebben begrepen en daardoor de oplossing niet tot een goed einde te kunnen brengen. (Trouwens „ingeklede vergelijkingen" vinden onze leerlingen meestal erg moeilijk). Het is m.i. overbodig en zelfs schadelijk als de lagere school haar leerlingen al „een beetje wiskunde" leert. In de eerste algebra-les begin ik met enkele historische bijzonderheden; de herkomst van het woord algebra, de wetenschap der Oosterse volkeren (Babyloniers, Arabieren enz.), om dan de grootste aandacht te besteden aan Pythagoras. De geschiedenis van de rekenkunde en wiskunde blijkt de leerlingen steeds te interesseren. Ze geeft aan het vak ook een beetje van dezelfde glans die alle oude, waardevolle dingen hebben en iets van het sprookjesachtige van alle dingen, die uit het oude Oosten komen. De getallenleer en getallenmystiek van Pythagoras is het

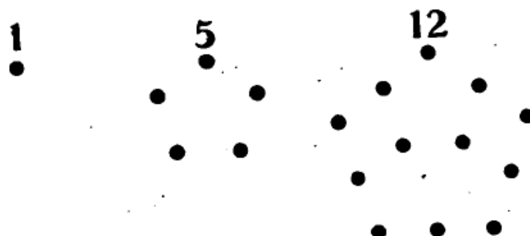
volgende onderwerp van gesprek, waardoor we van zelf komen op de driehoeksgetallen.

Deze worden getekend:



We schrijven de eerste zes op:	1, 3, 6, 10, 15, 21,	en de rij van
de 1e verschillen:	2 3 4 5 6	evenals de
rij der 2e verschillen:	1 1 1 1	

Met behulp van deze verschillen bepalen we enkele van de volgende driehoeksgetallen. We vragen naar het 50e driehoeksgetal. Er wordt geraden, sommige beginnen te rekenen, maar zien in, dat dat een hele toer wordt. Dan schrijf ik op het bord de formule: $\frac{1}{2} \times n \times (n + 1)$ en vertel, dat ik daarmee elk mogelijk driehoeksgetal heb opgeschreven. De verrassing komt nu als bij substitutie van $n = 1, 2, 3$ enz. inderdaad de driehoeksgetallen op volgorde te voorschijn komen. Als men te voren de nieuwsgierigheid weet te wekken is deze ontdekking van de formule reeds in de eerste of tweede algebra-les een openbaring van de waarde van de algebra, iets wat men niet bereikt met de voor de leerlingen *zinloze* mededelingen in de eerste lessen van de traditionele algebra-boeken over het rekenen met letters. De pientere leerling vraagt zich dan af, hoe je wel aan zo'n formule komt en de mededeling, dat het pas mogelijk is dat te verklaren als hij algebra kent, versterkt de indruk, dat de algebra zinvol is. Dezelfde berekeningen als met de driehoeksgetallen volgen nu met de vierhoeksgetallen, die we in 't vervolg kwadraatgetallen gaan noemen. De leerlingen raden in dit geval zelf de formule $n \times n$, die we gaan afkorten tot n^2. We merken op dat de rij der eerste verschillen de rij der oneven getallen is. Er worden wat vraagstukjes gemaakt met kwadraatgetallen, waarna de vijfhoeksgetallen aan de beurt komen: Tekenen:



Rijen der eerste en tweede verschillen. Bijzonderheden daarvan.

Het berekenen en daarna tekenen van het volgende vijfhoeksgetal met behulp van deze verschillen. En dan natuurlijk weer de formule: $\frac{1}{2} \times n \times (3n - 1)$.

(„Waarom juist de letter n?", vraagt een der leerlingen. We stellen vast dat elke letter geoorloofd is, maar n is de eerste letter van de uitdrukking „natuurlijk getal" en juist die getallen vullen we hier in).

Nadat besproken is wat de betekenis is van t_n in de formule $t_n = \frac{1}{2} \times n \times (3n - 1)$ gaan we er toe over zelf formules te bedenken. Ook hier is het element van verwondering en verrassing weer sterk, want de leerling die zelf een formule bedacht heeft, daarmee een rij getallen heeft berekend en daarin een regelmatige bouw heeft ontdekt, verwondert zich sterk over deze mogelijkheid. Het blijkt dan ook, dat velen thuis aan het experimenteren gaan en daar veel plezier in hebben. We stellen aan de orde de rijen: $t_n = 2n$, $t_n = 2n + 1$, $t_n = n^3$ enz. en dan opeens $t_n = 20 - 4n$. t_6 blijkt moeilijkheden te geven. We tekenen nu echter t_1 tot en met t_5 op een „thermometer" aan en dan blijkt $t_6 = -4$ niet moeilijk meer te zijn. Zo komen de negatieve en positieve getallen op heel natuurlijke wijze te voorschijn. Oefening hiermee vinden de leerlingen door het berekenen van t_1 tot en met t_9 van formules als $t_n = n^2 - 9n + 18$. We tekenen de uitkomsten aan op 9 naast elkaar staande thermometers en zien de regelmatigheid. (we spreken natuurlijk niet over de parabool). Dan komt de formule $t_n = n^3 - 6n^2 + 11n - 6$. Hierbij zijn t_1 en t_2, zoals we gezamenlijk uitrekenen, beide nul. We raden naar de waarde van t_3 en de leerlingen, die regelmaat verwachten, raden $t_3 = 0$, hetgeen ook waar blijkt te zijn. Vanzelfsprekend raadt dan de hele klas direct $t_4 = 0$ en als dan $t_4 = 6$ blijkt te zijn is het weer de heilzame verwondering, die we samen beleven. Natuurlijk is hier de gelegenheid te wijzen op de noodzakelijkheid steeds critisch te blijven en overijlde conclusies te vermijden.

Om het rekenen met negatieve getallen, in 't bijzonder het moeilijke aftrekken daarvan voor te bereiden berekenen we t_1 tot en met t_{10} van $t_n = n^3 - 18n^2 + 92n - 120$ of van $t_n = n^4 - 18n^3 + 117n^2 - 324n + 324$. We voldoen daarbij tevens aan punt 1 van bovengenoemde doelstellingen want in wezen is dit allemaal cijferwerk of liever nog hoofdrekenwerk. Van deze termen bepalen we dan de rijen der 1e, 2e, 3e en 4e verschillen, waarbij we afspreken een verschil positief te rekenen als we van een kleiner naar een groter getal gaan, anders negatief. We krijgen dan bijvoorbeeld

$t_n = n^3 - 18n^2 + 92n - 120$

	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	t_8	t_9	t_{10}	t_{11}
	— 45	0	21	24	15	0	— 15	— 24	— 21	0	45
1e verschillen:	+ 45	+ 21	+ 3	— 9	— 15	— 15	— 9	+ 3	+ 21	+ 45	
2e ,,	— 24	— 18	— 12	— 6	0	6	12	18	24		
3e ,,	+ 6	+ 6	+ 6	+ 6	+ 6	+ 6	+ 6	+ 6			

De regelmaat (in dit geval de symmetrie) van de reeksen boeit de leerlingen, vooral als er nog eens een tekening met behulp van thermometers bij gemaakt is.

Gemakkelijk is het nu uit de verschillenreeksen af te lezen: het verschil van — 18 en — 24 is + 6, zodat het dikwijls onbegrijpelijke

— 18
— 24
—— af

hiermee duidelijk wordt. + 6

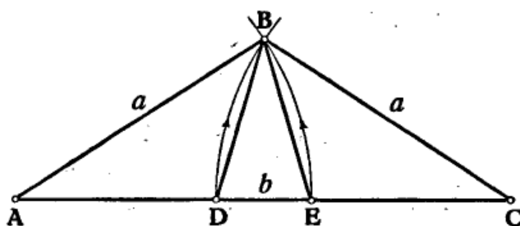
Zijn we zo ver gekomen dan is de gelegenheid er meestal wel in de een of andere paragraaf van het leerboek een geschikt aanknopingspunt te vinden en over te gaan tot het gebruiken daarvan.

Ik wees er hierboven reeds op, dat dit werk rechtstreeks aansluit bij het rekenen op de lagere school. Toch geeft het iets volkomen nieuws en stelt het het aparte karakter van de algebra de leerlingen direct voor ogen. Ze werken er graag mee en experimenteren thuis. De eerste algebra-lessen worden er m.i. vruchtbaar en aantrekkelijk door.

Groningen. G. KROOSHOF.

DE CONSTRUCTIE VAN THOMAS STRODE VOOR DE MIDDENEVENREDIGE TUSSCHEN TWEE LIJNSTUKKEN.

Voor het vinden van de middenevenredige tusschen twee lijnstukken a en b pleegt men twee of drie constructies te bespreken, die alle berusten op de evenredigheid van lijnen in den cirkel, in welk hoofdstuk deze constructies dan ook worden behandeld. Veel minder bekend schijnt de volgende constructie te zijn, die in eenvoud zeker niet voor de andere onderdoet en slechts de kennis van gelijkvormigheid van driehoeken vereischt. Men neemt, zooals in de figuur is aangegeven, op een lijn het grootste stuk AE = a,



in tegengestelde richting ED = b en weder in de oorspronkelijke richting DC = a. Als de cirkelbogen met a als straal en opv. A en C als middelpunt elkaar in B snijden, is BE = BD de gevraagde middenevenredige, zooals uit gelijkvormigheid van driehoeken onmiddellijk blijkt.

Voor zoover ik heb kunnen nagaan komt deze constructie in de leerboeken niet of zelden voor. In de beroemde leerboeken der 18e en 19e eeuw: LACROIX, CLAIRAUT, VAN SWINDEN, KÄSTNER, heb ik er vergeefs naar gezocht; evenmin heb ik ze aangetroffen in het meer moderne van ROUCHÉ en DE COMBEROUSSE. Terecht heeft dan ook indertijd de heer VERKAART er nog eens de aandacht op gevestigd [1]).

MAX SIMON, wiens encyclopaedische kennis van de wiskundige literatuur telkens weer onze verbazing wekt, deelt ook over deze constructie iets mede, zoowel in zijn boek over de elementaire meetkunde in de 19e eeuw [2]), als in zijn werk over didactiek [3]),

[1]) H. G. A. VERKAART. Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde, **24**, 1936—'37, bl. 201.

[2]) MAX SIMON. Über die Entwicklung der Elementar-Geometrie im XIX. Jahrhundert. Leipzig 1906. bl. 174.

[3]) MAX SIMON. Didaktik und Methodik des Rechnens und der Mathematik. München 1908. bl. 150.

dat indertijd als onderdeel van A. BAUMEISTER's „Handbuch der Erziehungs- und Unterrichtslehre für höhere Schulen" is verschenen. Hij vermeldt ze in het eerstgenoemde werk als „die berühmte sogenannte GOUZYsche Konstruktion" en verklaart in het andere: „Es wäre endlich an der Zeit, die sogenannte GOUZYsche Konstruktion, die den Pythagoras nicht braucht, auch in die deutschen Schulen einzuführen." Het is inderdaad juist, dat GOUZY deze constructie heeft medegedeeld [1]); hierop wijst b.v. ook de bekende Fransche wiskundige EMILE LEMOINE [2]). Toch was GOUZY niet de eerste geweest: vóór hem en blijkbaar onafhankelijk van hem was dezelfde constructie gepubliceerd door C. L. A. KUNZE te Weimar [3]). Het vraagstuk werd hier gesteld als „Übungsaufgabe für Schüler", overeenkomstig het karakter van het Archiv, dat immers in zijn titel voert: „mit besonderer Rücksicht auf die Bedürfnisse der Lehrer an höhern Unterrichtsanstalten." Daarentegen moet de mededeeling van SIMON, dat ook L. COLLETTE in 1892 van deze constructie melding maakt, op een vergissing berusten: de door hem gegeven oplossing [4]) is op zichzelf juist, berust eveneens op een zeer elementaire stelling, maar is zeker niet dezelfde als de hier bedoelde.

Behalve in de tijdschriftliteratuur treft men in sommige oudere werken opmerkingen aan, die met de constructie van GOUZY in nauw verband staan, ook al noemen de schrijvers deze niet uitdrukkelijk. In dit verband dient vooral te worden vermeld het in zijn tijd beroemde en ook thans nog gewaardeerde leerboek van BALTZER [5]).

Met het voorafgaande is echter nog lang niet alles gezegd, want in werkelijkheid is de methode nog veel ouder. Ze komt n.l. reeds voor bij den Engelschen wiskundige THOMAS STRODE in het jaar 1684.

Wie was deze THOMAS STRODE? Het is opmerkelijk, dat vrijwel alle werken over de geschiedenis der wiskunde, die ik heb kunnen raadplegen, over hem zwijgen, zelfs MORITZ CANTOR en het zoo volledige biographisch lexicon van POGGENDORFF. Men moet zijn

---

[1]) Nouvelles Annales de Mathématiques **16**, 1857, bl. 125. EDMUND AUGUST GOUZY werd in 1831 te Lausanne geboren en was directeur van een middelbare school, achtereenvolgens in Markirch en Munster, beide in de Elzas. Zoowel daar als in Zwitserland verrichtte hij meteorologische waarnemingen.

[2]) Mathesis, 2me série, **2**, 1892, bl. 275.

[3]) Archiv der Mathematik und Physik, **2**, 1842, bl. 328.

[4]) Mathesis, t.a.p. bl. 192.

[5]) R. BALTZER. Die Elemente der Mathematik, Leipzig 1867, II, § 11, 3, bl. 80. RICHARD BALTZER (1818—1887) was hoogleeraar te Giessen.

toevlucht nemen tot groote biographische werken en vindt dan het weinige, dat over zijn leven en werken bekend is [1]).

THOMAS STRODE werd omstreeks 1626 te Shepton Mallet in Somerset geboren. Na zijn studie in Oxford reisde hij eenigen tijd in Frankrijk, waarna hij zich te Maperton, eveneens in Somerset, vestigde. Het tijdperk van zijn wetenschappelijke werkzaamheid was ongeveer 1642—1688. Hij schreef een werk over permutaties en combinaties met toepassing op de waarschijnlijkheidsrekening en een over zonnewijzers. Met verschillende geleerden van zijn tijd voerde hij briefwisseling, vooral met JOHN COLLINS (1625—1683), en dat hij een bekende figuur was blijkt wel daaruit, dat anderen in hun correspondentie herhaaldelijk zijn naam vermelden [2]).

In een der brieven nu van STRODE en wel in dien, welken hij op 3 Nov. 1684 aan JOHN WALLIS (1616—1703) zond, legt hij dezen beroemden tijdgenoot zijn constructie voor [3]). Hij verontschuldigt zich, dat hij den grooten man met zoo iets elementairs lastig valt; hij meent evenwel, dat zijn methode nieuw is en bovendien zeer eenvoudig: ,,Ecquid enim est facilius, quam Triangulum Isosceles constituere?" (Immers is er wel iets gemakkelijker dan een gelijkbeenigen driehoek te construeeren?). Inderdaad schijnt WALLIS belangstelling te hebben gehad, want hij beantwoordde den brief reeds daags na ontvangst, op 12 Nov. 1684.

Het loont de moeite de mededeeling van STRODE volledig weer te geven; de hoofdletters hebben dezelfde beteekenis als in de figuur hierboven.

,,Invenire mediam proportionalem inter duas rectas; absque Perpendicularis erectione.

Sunto $r = 8$ & $s = 2$ rectae datae. Fiat AE $= r = 8$. EC$=r—s=6$. Centris A & C, distantia AB $= r = 8$ ducantur arcus duo se mutuo intersecantes in B. Jungatur EB. Est ea $= \sqrt{rs}$ quaesita.

Demonstratio. Rectangulo rs addatur $rr — rr$. Tum $\sqrt{:rr+rs—rr}$ est quaesita recta. Hic utique habetur quadratum rr, minutum rectangulo $rr — rs$, cujus latera $r = l = 8$, $r — s = n = 6$. Ergo invenietur BE. Nam si jungantur AB, BC, habetur Triangulum isosceles.

[1]) Dictionary of National Biography, vol. 55, London 1898. bl. 59.

[2]) Correspondence of Scientific Men of the seventeenth century, ed. STEPHEN JORDAN RIGAUD. 2 vols. Oxford 1841.

[3]) JOHANNIS WALLIS De Algebra Tractatus. Oxoniae 1693. bl. 299—301. De brief is door WALLIS in het Latijn vertaald; in de zooeven genoemde ,,Correspondence" komt hij niet voor.

Potest itidem fieri addendo $ss - ss$ ipsi rs. Sed tum saepenumero non continget intra conditionem requisitam."

Men zal dit bewijs waarschijnlijk ver van duidelijk vinden en zich afvragen, waarom men rs met r^2 moet vermeerderen om die vervolgens er weer van af te trekken. Blijkbaar is de bedoeling deze: men moet bewijzen, dat $BE^2 = rs$ is. Men mag hiervoor schrijven $BE^2 = r^2 + rs - r^2 = r^2 - r(r - s)$. Nu is, zoals de schrijver opmerkt, $\triangle$ ABC gelijkbeenig; in dezen driehoek zou nu $BE^2 = AB^2 - AE \times EC$ moeten zijn, hetgeen volgens een bekende stelling het geval is.

Men vraagt zich intusschen af hoe iemand op de gedachte komt een constructie, die zoo eenvoudig is, op zulk een zonderlinge manier te bewijzen en kan het eens zijn met SIMON, die dit bewijs „freilich ungeschickt" vindt, maar de stelling, waarop het berust, als „eine hübsche Übungsaufgabe" beschouwt.

Utrecht, Sept. 1948. D. J. E. Schrek.

TWEEDE CONFERENTIEWEEKEIND UITGAANDE VAN DE WISKUNDE WERKGROEP DER W.V.O.

De Wiskunde Werkgroep der W.V.O. (Werkgemeenschap voor Vernieuwing van Opvoeding en Onderwijs) heeft op 5 en 6 November j.l. onder voorzitterschap van Prof. dr H. Freudenthal, Hoogleraar aan de Rijksuniversiteit te Utrecht een conferentieweekeind georganiseerd in het Maarten-Maartenshuis te Doorn. De heren Dr F. van der Blij (leraar a/h Gem. Gymnasium te Breda), H. J. Struik (zenuwarts te Deventer) en P. J. van Albada (leraar a/h Lyceum voor Montessori-leerlingen te Rotterdam) hebben inleidingen gehouden met als centraal onderwerp: de wiskunde voor niet-mathematische richtingen. Een verslag van dit weekeind, met o.m. de volledige inleiding van de Heer Van Albada is verschenen in het Jan.nummer (no. 70) van „Vernieuwing" het officiele orgaan van de W.V.O. Belangstellenden kunnen dit nummer tegen betaling van ƒ 0,80 verkrijgen bij de uitgever fa. J. Muusses te Purmerend giro 15062.

AANMELDING VAN CANDIDATEN VOOR DE STAATSEXAMENS GYMNASIUM.

De Minister van Onderwijs, Kunsten en Wetenschappen, brengt ter algemene kennis van belanghebbenden, dat zij, die dit jaar het examen, bedoeld in artikel 12 der hogeronderwijswet (Staatsexamens gymnasium) wensen af te leggen, vóór 1 Maart 1950 uitsluitend per briefkaart en zonder toezending van enig ander stuk een aanmeldingsformulier moeten aanvragen bij de inspecteur der gymnasia, Dr J. M. van Buijtenen, Koningin Wilhelminalaan 1, Leidschendam.

AANMELDING VAN CANDIDATEN

voor de Staatsexamens hogere burgerschool A en B en voor het examen, bedoeld in artikel 3 van het Koninklijk besluit van 27 December 1934 (Staatsblad no. 678).

De Minister van Onderwijs, Kunsten en Wetenschappen, brengt ter algemene kennis van belanghebbenden, dat zij, die dit jaar het *Staatsexamen* hogere burgerschool A of B, bedoeld in artikel 55, tweede lid, van de middelbaar-onderwijswet, of het examen, bedoeld in artikel 3 van het Koninklijk besluit van 27 December 1934 (Staatsblad no. 678), wensen af te leggen, vóór 1 Maart a.s. uitsluitend per briefkaart en zonder toezending van enig ander stuk, een aanmeldingsformulier moeten aanvragen bij de heer J. H. van Dijk, Maerten Trompstraat 17, Delft.
